III

Funciones Circulares

3.1 Función.

El concepto fundamental en matemáticas es el de función. Aparecen con frecuencia en el calculo, variables relacionadas; por ejemplo: el volumen de tierra removida en una vía (curva) con el ancho de calzada, berma, etc., esta relacionada con el T.P.D. transito promedio diario (variable dada anteriormente por M.O.P. Ministerio de Obras Públicas ahora por el INVIAS). Hay un tipo especialmente importante de relación entre variables dependientes con una o varias variables independientes. Veamos a continuación un ejemplo que me permite observar la relación que existe entre variables.

Ejemplo: Se tiene una viga de sección prismatica que soporta una carga W ver Figura 3.1, se desea hallar la variación del cortante en función de la distancia de los apoyos (para determinar la máxima distancia entre los apoyos, y realizar el cálculo de los estribos).

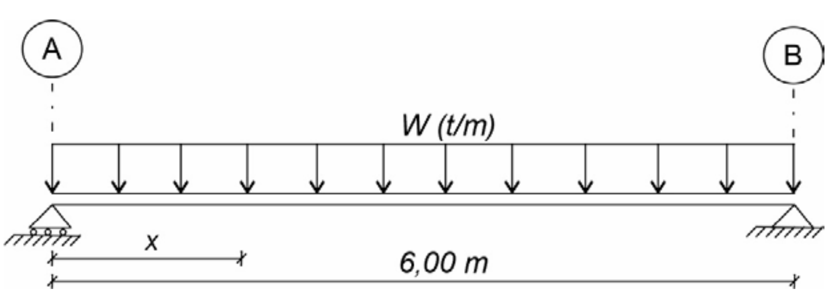


Figura 3.1
Viga de sección prismatica con carga W.

Para hallar la variación del cortante, se hace necesario determinar la magnitud de las reacciones R_A, R_B.

Tomando momentos en A, tenemos que: $\sum M_A=0$ condición de apoyo (a fin de obtener las reacciones)

$$WL\frac{L}{2} - R_B L = 0; \;\; R_B = \frac{WL}{2} = 3W$$

Veamos el cortante a una distancia *x* del apoyo A; si se realiza la sumatoria de fuerzas en la dirección vertical (Y) igual a cero, tendríamos:

$$\sum F_Y = 0 \;\; R_A - Wx - V(x); \; V(x) = 3W - Wx = W(3-x) \text{ t.}$$

Entonces la variación del cortante para una carga uniformemente repartida (W) tendrá un comportamiento lineal. Veamos que significa lo anterior, ver Figura 3.2. Si damos valores a *x* entre 0 y 6,00 podemos observar la variación del cortante a medida que se aleja de los apoyos.

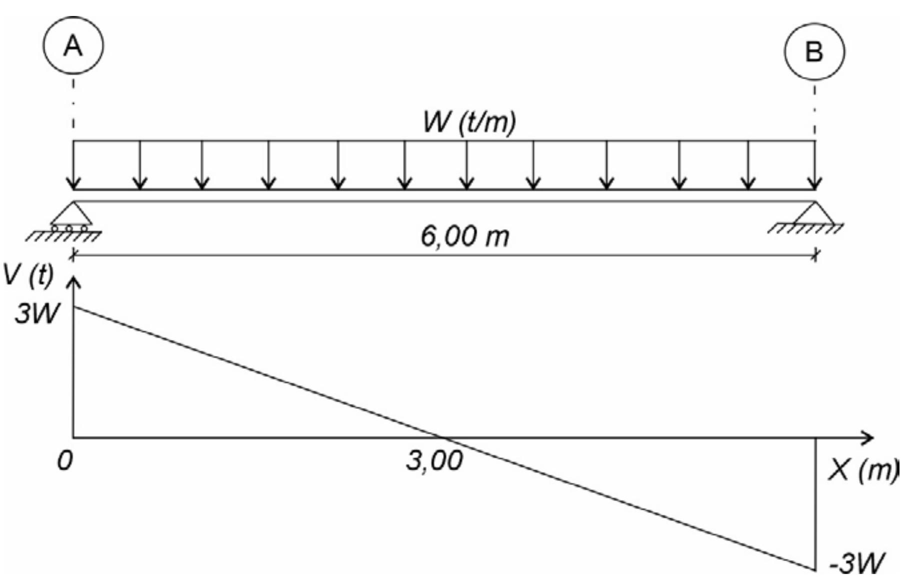


Figura 3.2
Diagrama de fuerza cortante (V) en viga con carga uniformemente repartida W.

Es decir que, el cortante es cero a *x=3* m del apoyo A o del apoyo B, luego los estribos van hasta una distancia menor a 3,00 m en teoria, dado que el concreto puede soportar un pequeño. Está es una de las muchas aplicaciones que tiene el concepto de función en la ingenieria civil.

3.2 Relaciones circulares

Consideramos un ángulo A en posición normal respecto del sistema de coordenadas rectangulares y tracemos, con centro en el origen, una circunferencia de radio $r > 0$, que corta al lado terminar del ángulo en un punto B(x,y), como muestra la Figura 3.3.

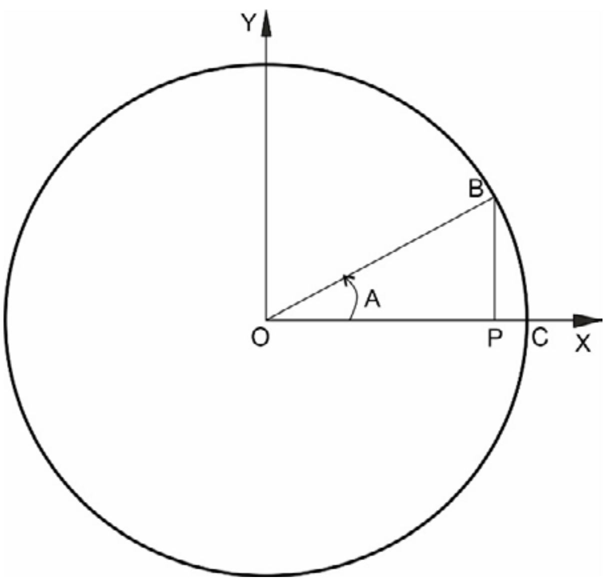


Figura 3.3
Relación circular del seno del ángulo A.

Desde B tracemos $\overline{BP}$ perpendicular $\overline{OC}$ en el punto *P*, llamese seno del arco *BC* o del ángulo A, a la relación $\overline{BP} / \overline{OP}$, es decir: $seno\ A = \overline{BP}/\overline{OP}$.

Sea el ángulo *A* de la Figura 3.4, dado por el arco *BC* con un con un radio cualquiera $r > 0$, el desde *C* levantamos $\overline{CT}$ perpendiculares a $\overline{OC}$ que interseca a $\overline{OB}$ en *T*.

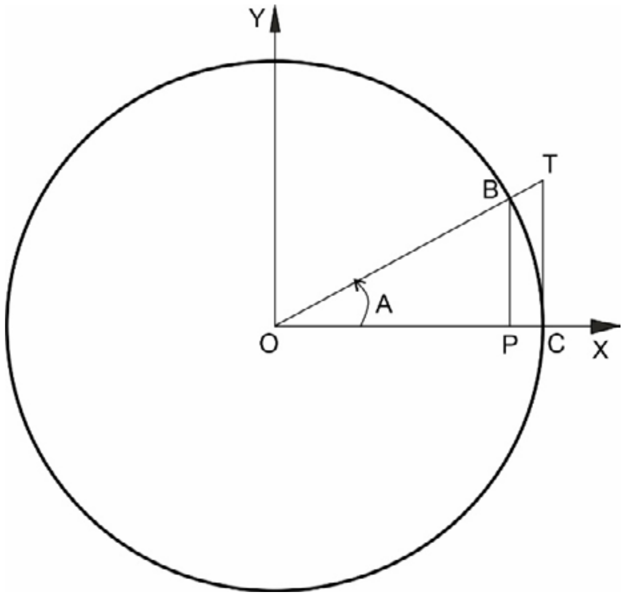


Figura 3.4
Relación circular de la tangente del ángulo A.

Llamese tangente del arco BC o del ángulo A, la relación $\overline{CT}\,/\,\overline{OC}$, es decir:

$tangente\ A = \overline{CT}\,/\,\overline{OC}$,

Sea el arco CB, para un radio cualquiera $r > 0$, ver Figura 3.5, si desde C levantamos $\overline{CT}$ perpendicular a $\overline{OC}$ que intersecta a $\overline{OB}$ en T.

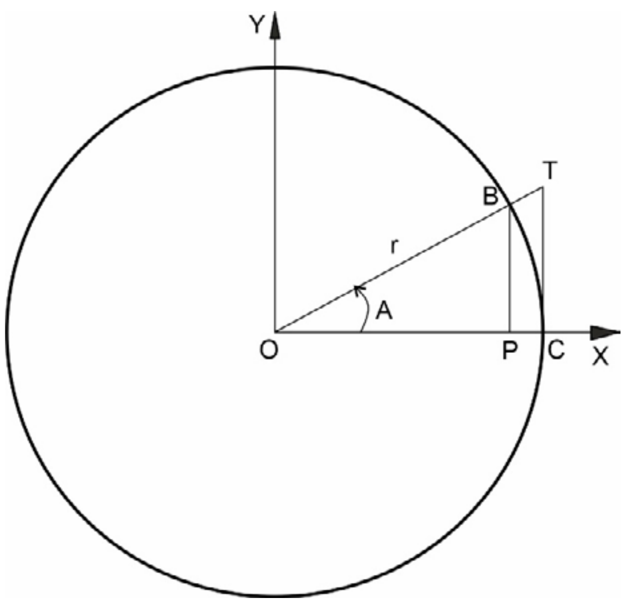


Figura 3.5
Relación circular de la secante del ángulo A.

Llamese secante del arco CB o del ángulo A, como la relación $\overline{OT}/\overline{OC}$, es decir que: $tangente\ A = \overline{OT}/\overline{OC}$,

Las relaciones seno, tangente y secante de un ángulo A se puede abreviar de la siguiente forma: seno A con *sen A*. tangente A como *tan A* y secante A como *sec A*. Mediante triangulos se puede demostrar que las relaciones dadas, son independientes del punto B de coordenadas (x, y) que se escoge en el lado terminal de A. Por conveniencia tomaremos el radio de la circunferencia igual a uno (1), ver Figura 3.6.

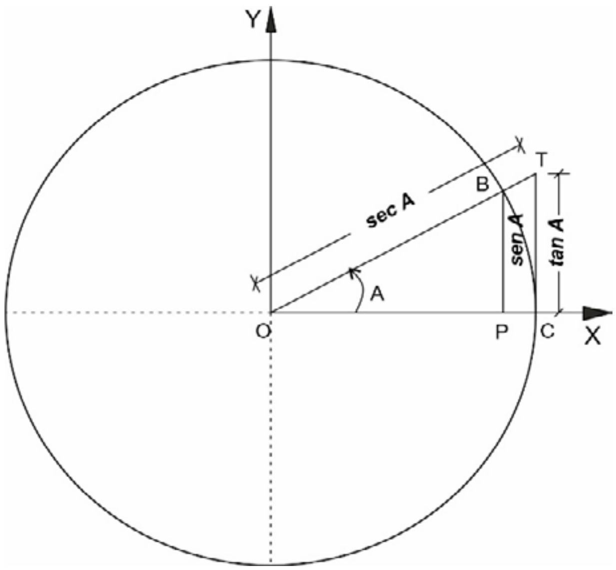


Figura 3.6
Relación circular del seno, tangente y secante del ángulo A.

Es decir que las relaciones indicadas graficamente se vuelven: *sen A*= $\overline{BP}$, *tan A*= $\overline{CT}$ y *sec A* = $\overline{OT}$. Veamos que la relación *sen A*, *tan A* y *sec A* son funciones circulares.

3.3 Funciones Circulares

3.3.1 Variaciones de la función Seno

Sea un circulo con centro en el origen de coordenadas ver Figura 3.7, cuyo radio $\overline{OA}$ = 1. Tracemos dos diametros perpendiculares AA' y BB' que dividen al circulo en cuatro sectores iguales llamados cuadrantes. Supongamos que el radio $\overline{OA}$ gira alrededor del punto O, en la dirección AB; cuando $\overline{OA}$ llegue a la posicion OM, habrá engendrado el ángulo AOM, la posición $\overline{OA}$ es el lado inicial donde empieza a medirse el arco AOM, hasta el lado terminal, o sea OM.

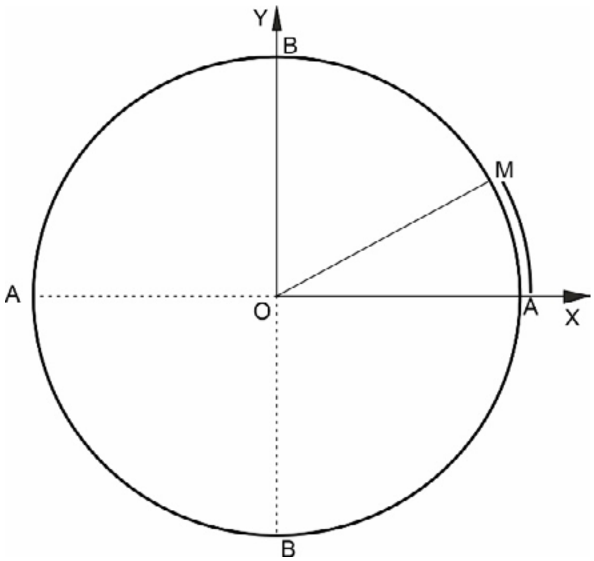


Figura 3.7
Circulo definido en un sistemas de coordenas con centro en el origen de coordenadas.

El radio $\overline{OA}$ en su movimiento de rotación habrá engendrado un ángulo de 90° cuando coincide con $\overline{OB}$; de 180° cuando coincida con $\overline{OA'}$; de 270° con $\overline{OB'}$; y de 360° cuando vuelva a su posición inicial. Observece que cuando el radio $\overline{OA}$ vu$\overline{OA}$a a coincidir con $\overline{OB}$ habrá engendrando un ángulo de 450°, y asi sucesivamente podremos continuar. Si el radio $\overline{OA}$ gira en sentido opuesto, los ángulos recorridos se consideran como negativos.

En la Figura 3.8 es representado el seno de un arco AM o del ángulo AOM. Se considera el seno como positivo cuando se encuentra encima del diametro $\overline{AA'}$, y negative cuando está debajo.

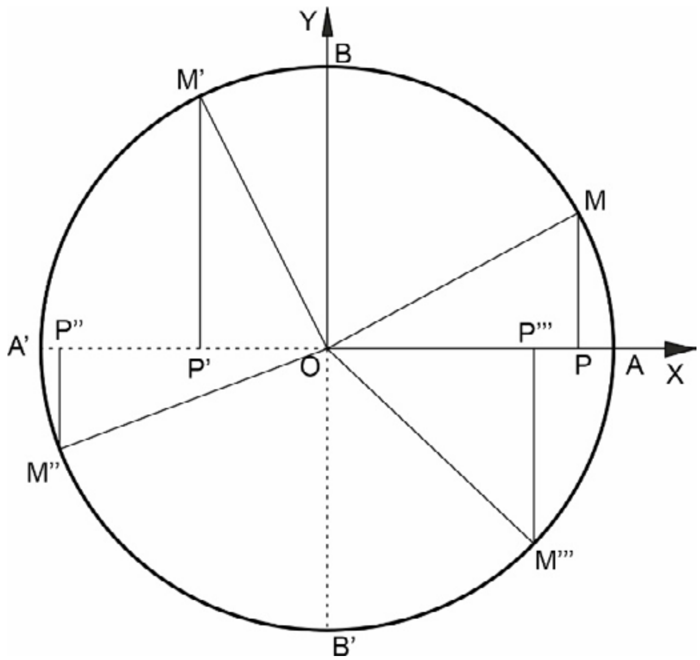


Figura 3.8
Variación de la función seno.

Por consiguiente, el seno es positive en los dos primeros cuadrantes, y negativo en los otros dos. Cuando el punto movible M esta en A, el seno es igual a cero, es decir que el seno (0)° = 0; si M se mueve en el sentido ABA'B', el seno MP va aumentando, y su valor es 1 cuando M llega a B, luego el seno (90)° = 1. En seguida disminuye y es igual a M'P' cuando M esta en M'; cuando M esta en A', el seno es igual a cero, es decir que el seno (180)° = 0 siguiendo M su camino de AA', el seno resulta negativo; al llegar M al punto M'', el valor del seno es – M''P''; es igual a -1 cuando el punto movil esta en B' es decir que el seno (270°) = –1; luego aumenta y es igual a 0 cuando M vuelve a A, entonces sen (360°) = 0, es decir que el sen (0°) = sen (360°) = 0. Si M sigue su recorrido encontraremos que el sen (450°) = sen (90°) = 1, sen (540°) = sen (180°) = 0 y asi sucesivamente.

Lo anterior puede ser generalizado por:

$$sen\ A = sen\ (A + 2n\pi) \ \text{ para cualquier } n \qquad (5)$$

Estos es posible ya que los valores de la relación *sen A* se repite en intervalos de longitud es 2π. Por lo tanto el seno A puede variar entre -1 y $+1$, tomando todos los valores comprendido entre estos dos limites. Sabemos que la gráfica de cualquier función consiste en el conjunto de todos los puntos (x, y) cuyas coordenadas satisfacen la relación dada. Para obtener las gráficas de las funciones circulares, haremos *y* igual a cada función, para el tranzado de la gráfica de la ecuación resultante, se empleará las variaciones de cada función, como se a discutido.

Para graficar la función circular *seno x*, haremos *y = sen x,* esta grafica consiste en el conjunto de todos los puntos (x, y) cuyas coordenadas satisfacen *y = sen x*, donde *x* y *y* son número reales, el significado de esta función es que cuando *x* varia, se obtiene el valor correspondiente *y* en radianes. Así, si $x = \pi / 3$, $y = sen\ \pi / 3 = 0{,}87$; si $x = \pi / 6$, $y = sen\ \pi / 6 = 0{,}50$; y así sucesivamente. Por conveniencia, a menudo el punto $\pi = 3{,}1416...$ puede ser asumido como x = 3,14. Por la periodicidad de la función *sen x* (sección 3.3.1) la parte de gráfica obtenida así, puede repetirse indefinidamente a la derecha y a la izquierda, para obtener la gráfica completa; para nuestro caso analizaremos los intervalos desde *0* a *2π,* ver Figura 3.9.

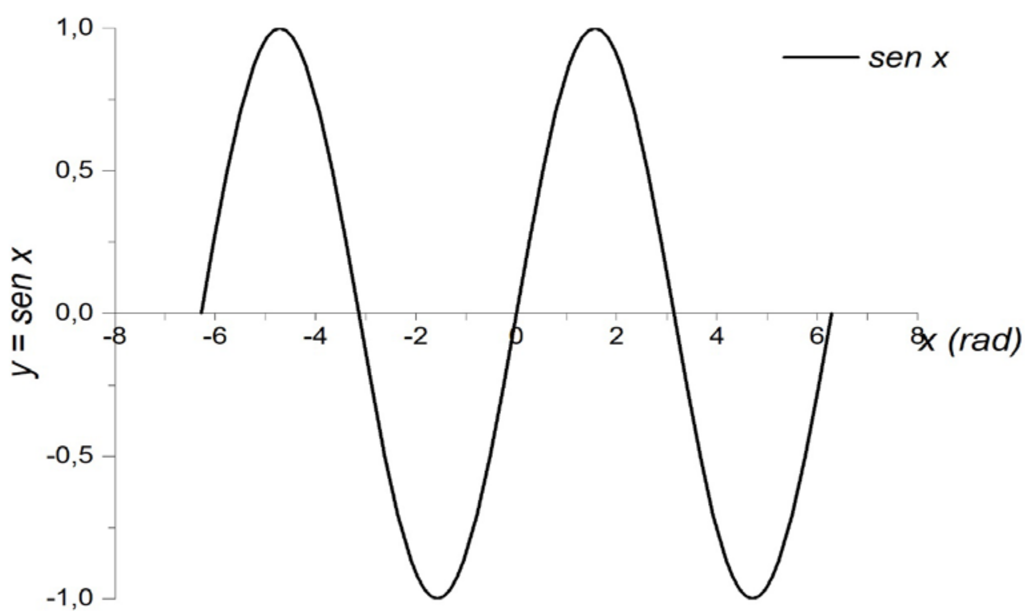


Figura 3.9
Función seno en el intervalo [-2π, 2π].

3.2.2 Variaciones de la función tangente

Sea $\overline{AT}$ la tangente del arco AM, o del ángulo correspondiente AOM, ver Figura 3.10. Por convención, la tangente es positive cuando el radio $\overline{OM}$ prolongado encuentra a $\overline{TT}$ se encuenra encima de $\overline{AA}$, y negative cuando lo encuentra debajo. Luego, la tangente es positiva en los cuadrantes 1 y 3, y negative en los otros dos.

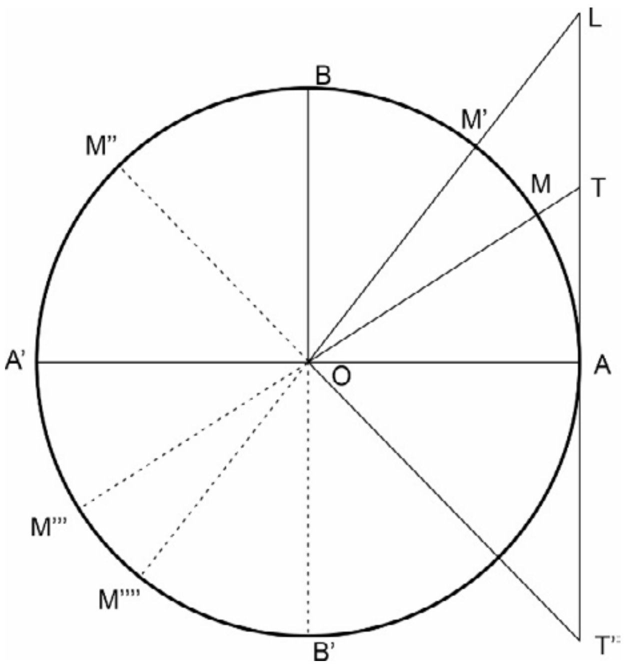


Figura 3.10
Variación de la función tangente.

Cuando el punto movil está en A, la tangente es igual a cero, luego *tan (0) = 0*; siguiendo M la dirección ABA'B', la tangente aumenta en el tramo AB, observamos que cuando el punto móvil está en M la tangente valdrá AT y cuando M esta en M' la tangente valdra $\overline{AL}$, donde $AL > AT$. Luego si M se acerca cada vez más a B la tangente se acercará cada vez mas a $+\infty$, es decir cuando M esta en B la tangente aumenta a $+\infty$; tan pronto como M pase del punto B, la tangente se hace negative y pasa sin transición de $+\infty$ a $-\infty$, y en seguida se disminuye su valor absoluto, hasta hacerse cero cuando M se encuentre en A', es decir que *tan (180°) = 0*; observece que cuando M estaba en M'' la tangente valdrá –AT'' e ira disminuyendo en valor absoluto a medida que se acerque a A'. Siguiendo su movimiento el punto M, la tangente cambia de signo y crece constantemente; su valor es AT cuando el punto movible esta en M''; luego aumenta hasta $+\infty$ cuando M está en B', y de repente pasa por segunda vez de $+\infty$ a $-\infty$; en fin, disminuye su valor absolute hasta 0 cuando M vuelve a A, es decir que $tan\ (360°) = tan\ (0°) = 0$. Si M sigue su recorrido encontraremos que $tan\ (450°) = tan\ (180°) = 0$ y así sucesivamente.

Lo anterior puede ser generalizado asi:

$$tan\ A = tan\ (A + n\pi) \text{ para cualquier } n \tag{6}$$

Estos es posible ya que los valores de la relación *tan A* se repitan en intervalos de longitudes π. Por lo tanto, la tangente puede variar entre $+\infty$ y $+\infty$ tomando todos los valores posibles, positivos o negativos. Notese que estos valores máximos y mínimos se consiguen cuando el punto móvil se encuentra en cualquiera de las siguientes posiciones, $\pi/2 = 3\pi/2 - 5\pi/2$... .

Para graficar de $y = tan\ x$, según lo que acabamos de ver en la variación del ángulo para $0 < x < \pi$, y empleando nuestro conocimiento sobre el comportamiento de la función tangente para los valores de x próximos a $\pi / 2$. Si la posición de la curva obtenida así para $0 < x < \pi$ se continua en ambas direcciones (ver sección 3.3.2 y 3.3.3.) el periodo de la *tan x* es π, es posible obtener la curva tangente, ver Figura 3.11.

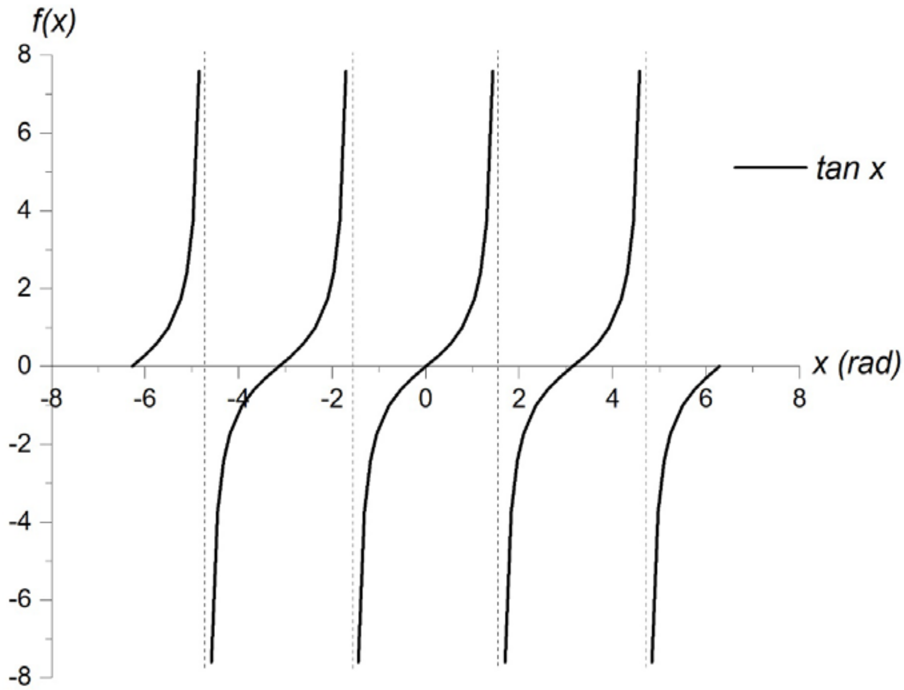


Figura 3.11
Función tangente en el intervalo [-2π, 2π]

3.3.3 Variaciones de la función secante

Sea $\overline{OT}$ la secante del arco OM, o del ángulo correspondiente AOM, ver Figura 3.12 por convención, la secante es positive cuando resulta a la derecha del diámetro $\overline{BB'}$, y como negativa cuando está a la izquierda. Luego, la secante es positive en los cuadrantes 1 y 4, y negative en los otros dos.

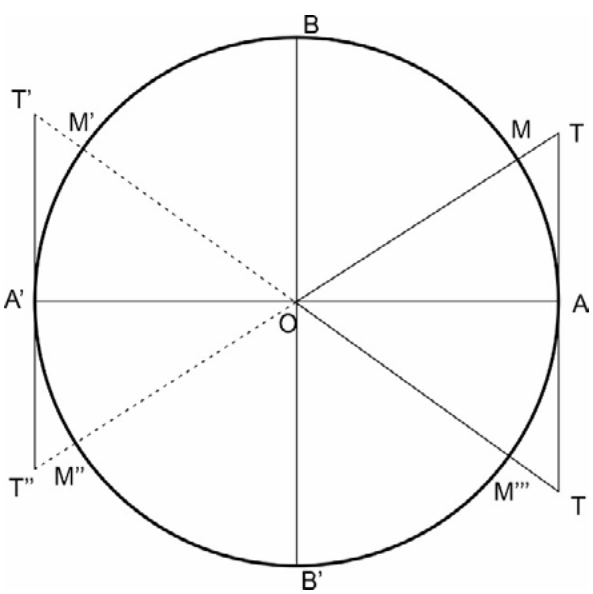


Figura 3.12
Variación de la función secante.

Cuando el punto movil M se encuentra en A, la secante es igual a 1, es decir que *sec (0°) = 1*; al recorrer la circunferencia en el sentido ABA'B'. El punto movil M, observamos que, cuando M se encuentra en el punto M la secante valdrá OT > 1, es decir que la secante aumenta en el arco AB, haciendo *+∞* cuando el punto móvil M se encuentra en B; cuando M pasa del punto B, la secante se hace negativa y pasa sin transición de *+∞* a –∞. En seguida empieza a disminuir su valor absoluto; cuando M está en M' la secante será OT' donde –∞ < *OT* < *–1* y cuando llega a A' la secante será *–1*, es decir *sec (180°) = – 1*; al seguir su recorrido el punto movible M obtenemos que la secante será OT' cuando M se encuentre en M'', y que *[OT'']* > *1*, es decir que la secante aumenta en valor absoluto en el arco A'B', haciendose –∞ cuando el punto móvil M se encuentra en B'; cuando M pasa del punto B', la secante se hace positive y pasa sin transición de –∞ *+*∞ y en seguida empeza a disminuir cuando M se encuentra M''' la secante será OT'''>1 pero OT''<*+*∞ y cuando M llega a A la secante será nuevamente 1, es decir que *sec (360°) = sec (0°) = 1*. Si M sigue su recorrido encontraremos que *sec (540°) = sec (180°) = –1* y así sucesivamente. Lo anterior puede ser generalizado por:

$$sec\ A = sec\ (A + 2n\pi) \text{ para cualquier } n \qquad (7)$$

Estos es posible ya que los valores de la relación secante se repiten en intervalos de longitud *2*π. Por lo tanto, la secante puede variar entre *+*∞ y -∞, tomando todos los valores posibles, positivos o negativos. Notese que estos valores donde se presenta *+*∞ y –∞ se consiguen cuando el punto móvil se encuentra en cualquiera de las siguientes posiciones: π*/2, 3*π*/2, 5*π*/2, ……,* π*/2+*ππ donde *n* pertenece a los enteros. La gráfica de la función *sec x* pueden obtenerse también de la misma manera que las funciones *sen x* y *tan x*; veamos a continuación en la Figura 3.13 la función secante.

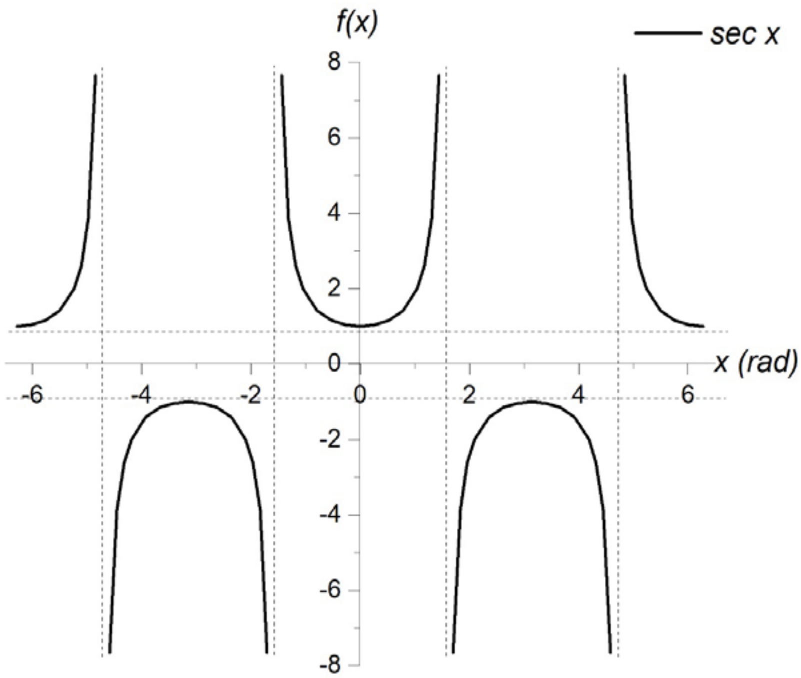


Figura 3.13
Función secante en el intervalo [-2π, 2π].

3.3.4 Consideraciones

Es posible saber si una relación es función, aplicando la definición de función. Analizaremos la relación circular *sen x*, obtenemos que el dominio de la relación *sen x* es el conjunto de partida R y el conjunto de imagenes es el intervalo *[–1,1]*, según la relación 3.3.1. además, cada real del dominio tiene imagen única en el codiminio, luego la relación circular *sen x*, es una función circular y la notaremos *f(x) = sen x*.

Veamos si la relación tangente es una función: sea la relación *f(x) = tan x*.

$$F: R^* \longrightarrow R;\ \text{donde } R^* = R - \left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) \text{ donde } n \in \mathbb{Z}.$$

Esta restricción que se hace al dominio de la relación *tan x*, es por que la tangente no esta definida en dichos puntos (ver sección 3.3.2.); es decir, dichos valores de x debemos eliminarlos del conjunto R por que la relación tangente x sea una relación funcional o una función circular, puesto que cada elemento del dominio, debe tener imagen única en el conjunto de llegada o recorrido.

En forma similar se puede definer la función *sec x*, así:

$$F: R^* \longrightarrow R; \text{ donde } R^* = R - \left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) \text{ donde } n \in \mathbb{Z}.$$

Para mayor claridad de la restricción hecha al dominio de la relación circular *sec x*, (ver sección 3.3.3). En el presente trabajo cuando se haga referencia a las funciones circulares estaremos refiriendonos a las funciones *sen x, tan x* y *sec x*, a menos que se diga lo contrario.

3.4 Cofunciones.

Existen otros tipos de funciones (funciones circulares) llamadas "cofunciones" es decir, las funciones definidas para el ángulo complementario se conocen como co-funciones y así, la cofunción de la función seno, es el coseno, la cofunción de la función tangente es cotangente y que a cofunción de la función secante es la cosecante definidas de la siguiente forma. Sea un circulo de radio 1, vease la Figura 3.14.

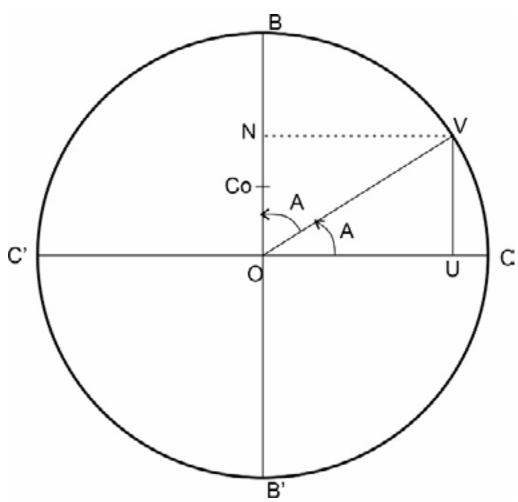


Figura 3.14

Variación de la función coseno.

Tracemos dos diametros perpendiculares $\overline{CC'}$, $\overline{BB'}$ que dividen el circulo en cuatro sectores iguales llamados cuadrantes, y V un punto cualquiera que se encuentra sobre la circunferencia de *r = 1*, desde V trazamos VU perpendicular a $\overline{OC}$, llamese coseno del arco VC, la relación $\overline{OU}/\overline{OV}$, es decir: coseno A = $\overline{OU}$ ya que OU = r = 1.

Sea el ángulo A de la Figura 3.15, dado por el arco VC con un radio *r = 1*, si desde B trazamos una paralela $\overline{CC}$ que corte a $\overline{OV}$ en el punto T, llámese cosecante del arco VC o del ángulo A, a la relación $\overline{OT}/\overline{OV}$, es decir: cosecante A = $\overline{OT}$ ya que OV = R = 1

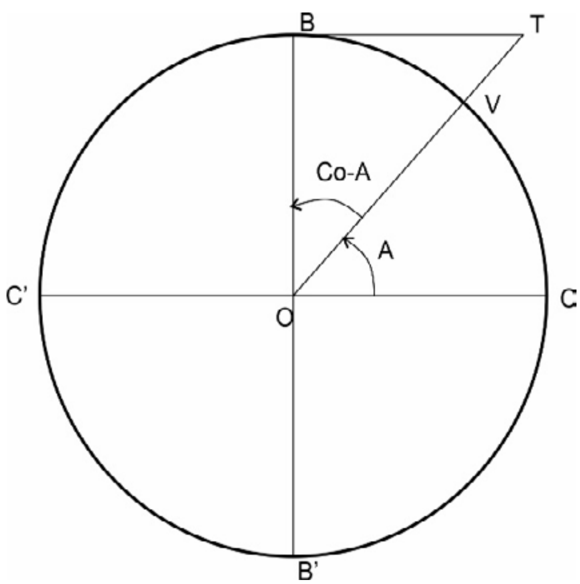


Figura 3.15
Variación de la función cosecante.

Llámese cotangente del arco VC o de ángulo A, a la relación BT/OV vease la Figura 3.16, es decir; cotangente A = BT/OV ya que OV = r = 1

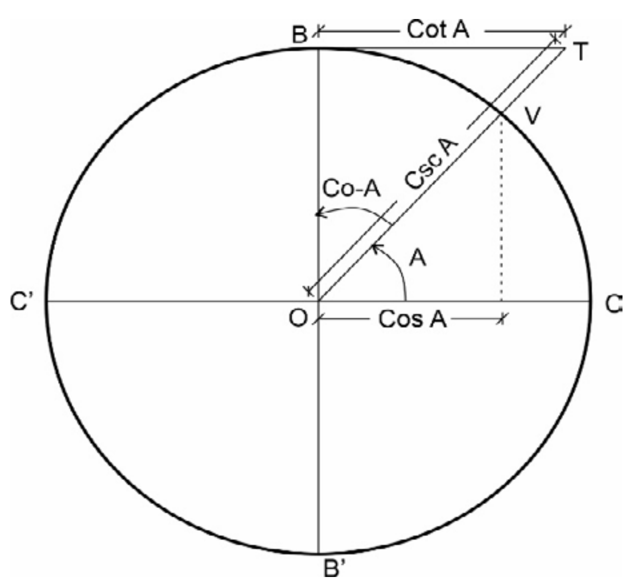


Figura 3.16
Variación de la función cotangente.

Las relaciones coseno A, cosecante A y cotangente A pueden abreviarse de la siguiente forma: coseno A como *cos A*, cosecante A como *cosec A*, cotangente A como *cot A*. Mediante triángulos se puede demostrar que las relaciones dadas, son independientes del punto V de coordenadas (x, y) que se escoge en el lado terminal de A. Nótese que la convergencia se ha tomado con $r = 1$ pero puede ocurrir que $r > 0$ para cualquier r, veamos las relaciones: coseno A= $\overline{OU}$, cosecante A= $\overline{OU}$ y cotangente A= $\overline{CT}$, vease la Figura 3.16.

3.5 Cofunciones Circulares.

3.5.1. Variaciones de la cofunción del seno:

Sea $\overline{OP}$ el coseno del arco AM o del ángulo correspondiente AOM, Figura 3.17. Se ha convenido en considerar el coseno positivo cuando esta a la derecha de diámetro $\overline{BB´}$, y como negativo cuando está a la izquierda. Por consiguiente, el coseno es positivo en las coordenadas 1 y 4, y negativo en las otra dos. Cuando el punto M está en A, el coseno es igual a 1. Si el punto M recorre la circunferencia en sentido antihorario el coseno disminuye y se hace cero cuando llega al punto B; luego cambia el signo, y aumenta en valor absoluto; –OP’’ cuando M se localiza en el punto M’’, –1 cuando M a llegado hasta el punto A’.

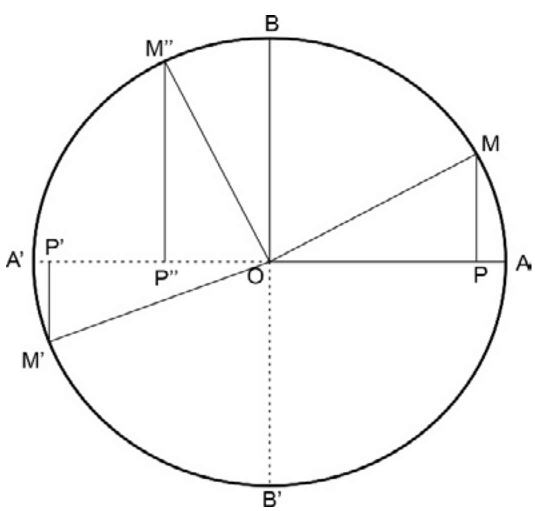


Figura 3.17
Variación de la función circular coseno.

Siguiendo M su camino, el coseno es negativo y disminuye en valor absoluto, hasta O cuando M está en B, luego aumenta y se hace igual a 1 cuando M llega a A. así pues, el coseno puede variar entre *–1* y *1* tomando todos los valores correspondientes entre estos dos limites. Ahora bien si observamos *cos (0°) = cos (360°) = 1*, si M sigue su recorrido encontraremos que *cos (450°) = cos (90°) = 0* y así sucesivamente. Lo anterior puede ser generalizado por: *Cos A = cos (A+2nπ)* para cualquier *n,* ya que los valores de la relación coseno A se repite en intervalos de longitud *2*π En la Figura 3.18 se ilustra la cofunción coseno de *x*, recuerde que $\cos x = sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

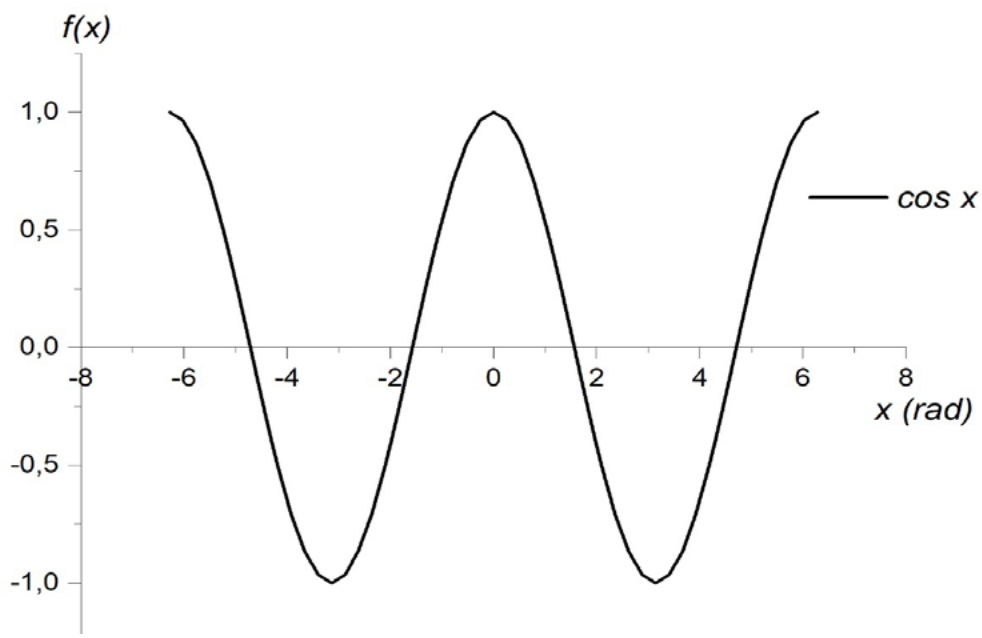


Figura 3.18
Variación de la función coseno

3.5.2 Variaciones de la cofunción de la tangente

En lugar de estudiar el comportamiento de la cofunción cotangente A como la cofunción coseno A, haremos un análisis mucho más sencillo y didáctico. Sea el arco *CM = A*, ver la Figura 3.19, los triángulos *TCO* y *TBO* son semejantes, por ser rectángulos, y el ángulo *TOC* del uno es igual al ángulo *BTO* del otro. Luego se tiene que: $\overline{TB}/\overline{OB} = \overline{OC}/\overline{CT}$ ó *cot A/1=1/tan A* , es decir que, *cotA = 1/tan A*. Así pues, la tangente A es reciproca de la cotangente A y viceversa, por lo tanto, las variaciones de la cotangente dependen de las tangente.

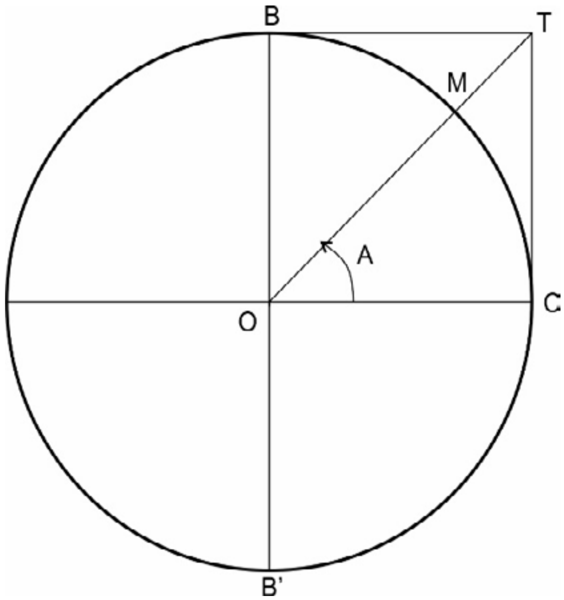


Figura 3.19

Variación de la función circular cotangente.

En la relación *cotan A = 1 / tan A*, siendo invariable el numerador *1*, el signo de la cotangente A dependerá del de la tangente A. Luego la cotangente, así como la tangente, será positiva en los cuadrantes 1 y 3, negativa en los cuadrantes 2 y 4. De esta relación podemos deducir que cuando la tangente A aumenta, la cotangente A disminuye, es decir que cuando la *tan A* es ∞, la *cotan A* es *0*, y cuando la *tan A* es *0*, la *cot A* es ∞. Por lo tanto, la *cot A* así como la *tan A*, puede tomar todos los valores posibles. Para la relación *cot A* se cumple que:

$$cot\ A = cot\ (A + n\pi) \text{ para cualquier } n \tag{8}$$

ya que *cot A = 1/Tan A*. Nótese que la *cot A* tiende a ∞ cuando la *tan A* tiende a cero, para *0, π, 2π, 3π, …… nπ*, donde *n* pertenece a los enteros. La Figura 3.20 ilustra la variación de la cofunción *cot x*; recuerde que *cot X = tan(π/2 – x),* por lo tanto, seria la tan *x* desplazada *π / 2* a la derecha.

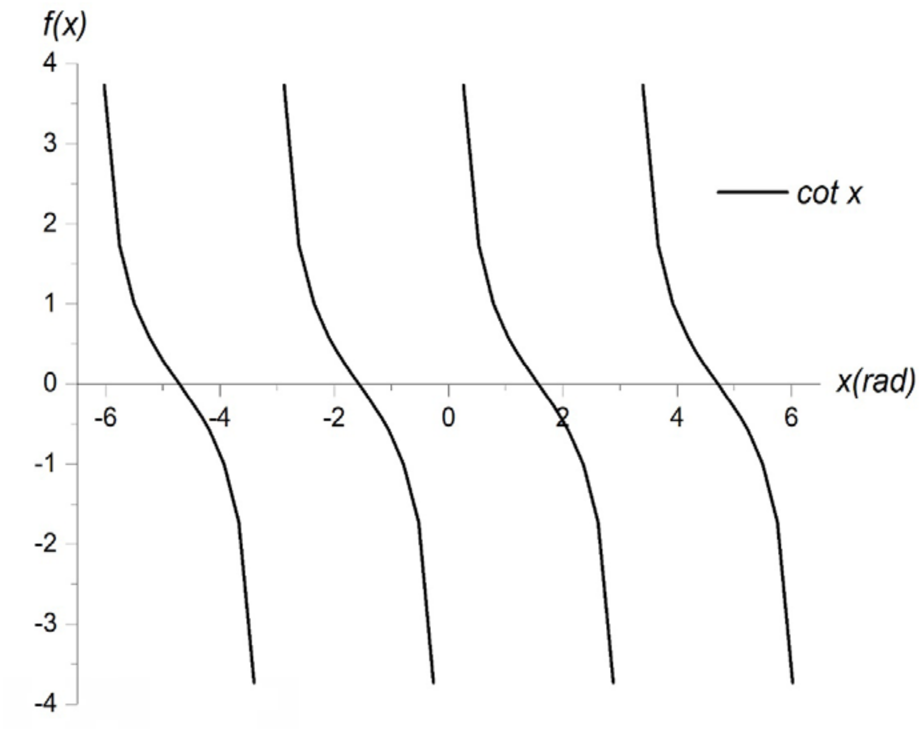


Figura 3.20
Función cotangente en el intervalo [-2π, 2π]

3.5.3 Variaciones de la cofunción de la secante

Sean los triángulos rectángulos semejantes SBO y MQB, ver la Figura 3.21 dónde: $\overline{OS}/\overline{OM} = \overline{BO}/\ (\overline{QO}\ o\ \overline{MP})$ o *cosec A/1 = 1/senA* luego, *cosec A =1/sen A* . Es decir la cosecante A es lo inverso del seno A y sus variaciones dependen de las del seno A.

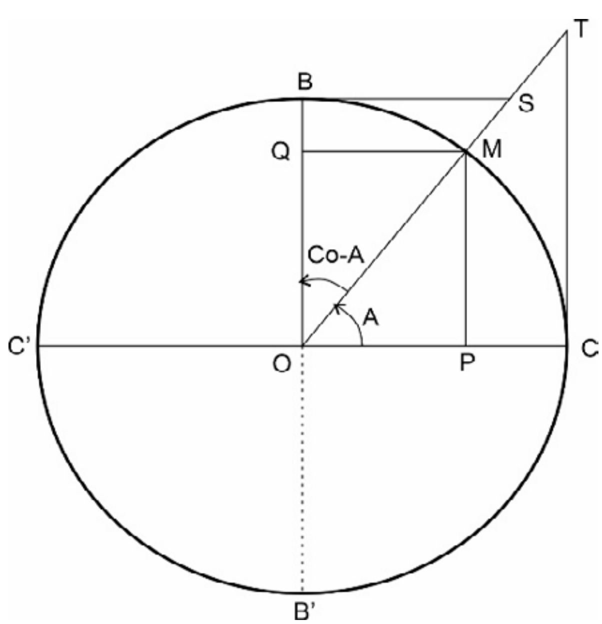


Figura 3.21

Variación de la función circular cosecante.

El signo de la cosecante A es el mismo que el del seno A, y como este es positiva en los cuadrantes 1 y 2, negativa en los dos restantes. Cuando el seno A es *0*, la cosecante A es también *1*, cuando el seno A es *0*, la cosecante A es ∞ luego:

$$cosec\ A = cosec(A + 2\pi/n) \text{ para cualquier } n \tag{9}$$

Por lo tanto la cosecante A puede tomar valores entre *1* y *+∞*, *−1* y *−∞* tomando todos los valores posibles, positivo o negativo. Nótese que estos valores máximos y mínimos se consiguen cuando el punto móvil M se encuentra en cualquiera de las siguientes posiciones: $0 = \pi = 2\pi = 3\pi,\ldots,n\pi$ donde $n \in Z$. La cofuncion *cosec x* es lo mismo que *cosec(x + π/2)*, la cual ya sabemos su variación (ver sección 3.3.3) y su representación se da a continuación

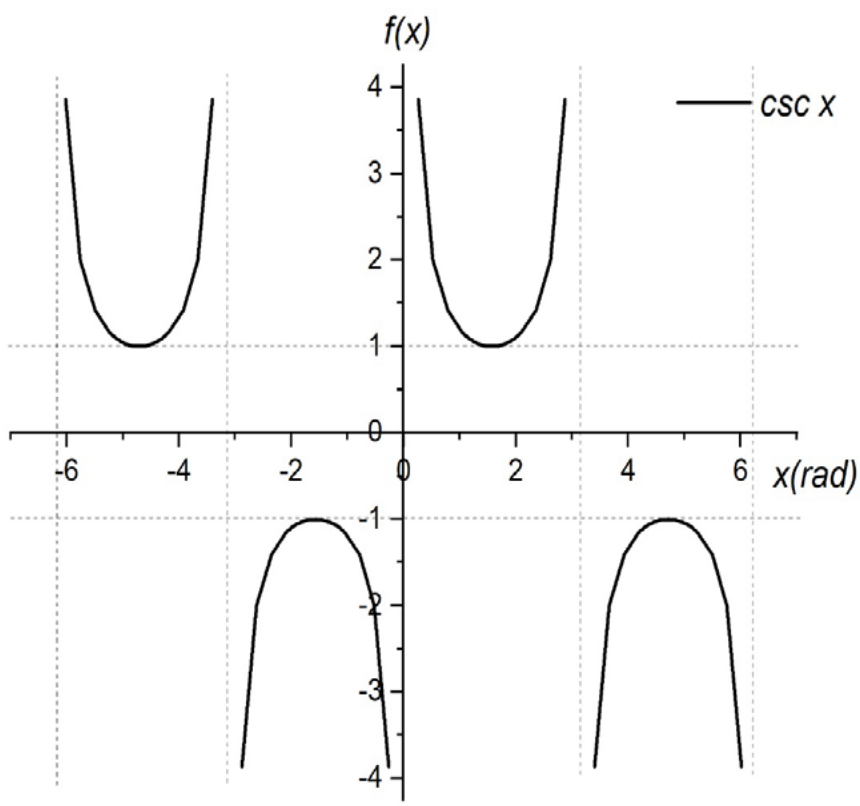


Figura 3.22
Función cosecante en el intervalo [-2π, 2π].

3.6 Valores principales de las funciones y cofunciones circulares

El signo de las funciones circulares depende de los diferentes cuadrantes, ya que cada función está definida como positivo o negativo dependiendo del cuadrante en que se encuentre, ver secciones 3.3 y 3.5. En el siguiente cuadro se indican los signos de las funciones y cofunciones.

Tabla 1.

Signo de las funciones y cofunciones respecto a los cuadrantes cartesianos.

Función	Cuadrante			
	I	II	III	IV
seno A	+	+	-	-
tangente A	+	-	+	-
secante A	+	-	-	+
Cofunción				
coseno A	+	-	-	+
cotangente A	+	-	+	-
cosecante A	+	+	-	-

Ejemplo: En la colina de Santa Elena que domina el valle de Medellín se levanta una torre para conexión inalambrica gracias a un plano topográfico de la zona se tiene la cuota baja y alta de la colina, es decir 1142 m y 1184 m respectivamente. Se desea saber la altura necesaria de la Torre para que el ángulo de elevación desde la alcaldía distante 785 m sea de 15°42’, ver Figura 3.23. Nota tenga en cuenta que la alcaldía se encuentra ubicada a una altura de 1153 m sobre el nivel del mar.

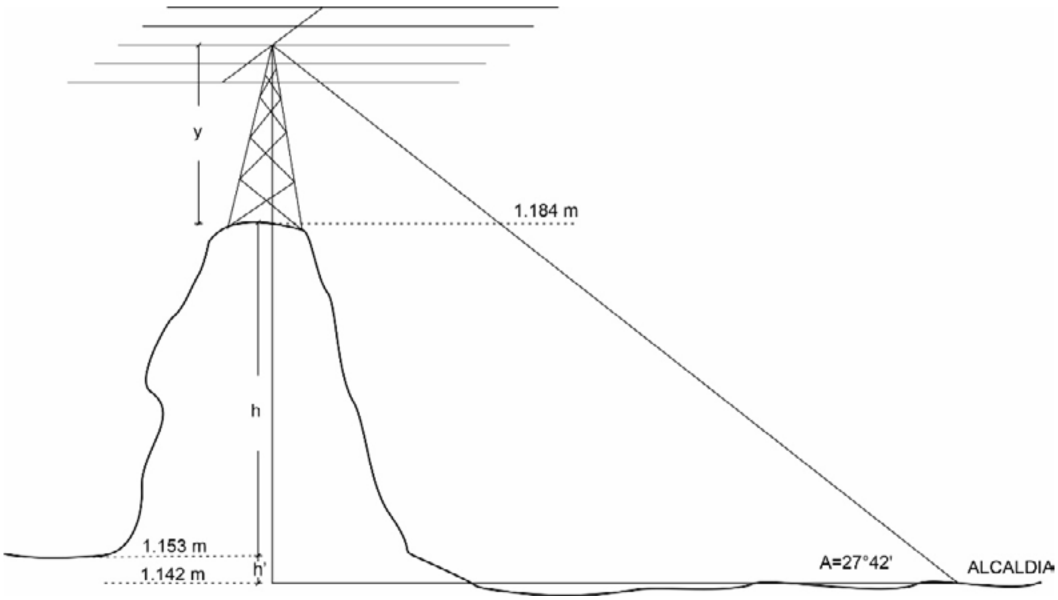


Figura 3.23
Altura de torres de transmisión.

La *tan A*, para *A = 27°42'*; *Tan A = (H + y)/785; h = 1184 – 1153 = 31*m y *v* es la altura de la torre (m). Luego $\tan(15°42') = \frac{31+y}{785}$; $y = 189{,}65$ m. Luego no es aconsejable tener un ángulo de elevación *A* grande a una pequeña distancia ya que una torre de semejante altura es costosa e innecesaria.

Ejemplo: Para medir la distancia de un punto *D* a un punto inaccesible *B*, se ha tomado como base *C=80* m perpendicular a *B*; calcular la distancia *B* si el ángulo *DCB* es de *48°25'*, ver Figura 3.24.

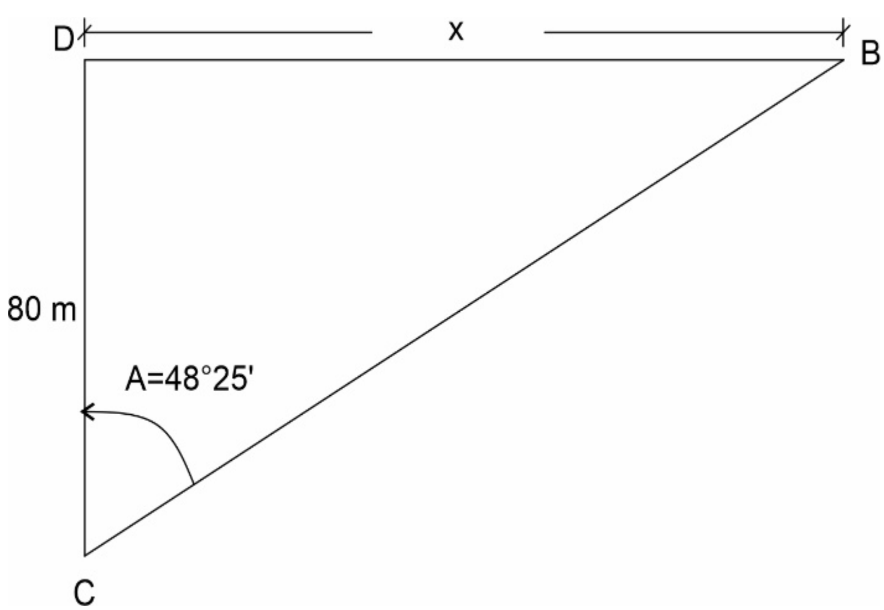


Figura 3.24
Distancia entre dos posiciones.

La función trigonométrica *tan A*, obtenemos que: *tan A = X/80; X = 80 tan (48°25´) = 90,16 m* m. Luego la distancia entre los dos puntos inaccesibles *D* y *B* es de *90,16* m.

3.7 Propiedades de las funciones circulares

Se puede estudiar una gran cantidad de propiedades de las funciones circulares considerando los efectos sobre las gráficas de ciertos cambios en las variables. En particular consideramos las siguientes propiedades: translación y reflexiones; estás propiedades son básicas en las demostraciones del teorema 4.8 1.3.

3.7.1 Translación

Sea el punto (m, n) las coordenadas de un punto sobre la gráfica de $y = F(x)$, entonces el punto $(m+a, n)$ resulta en la traslación de la gráfica a una distancia a en la dirección de las x positivas y es equivalente sobre la gráfica de $Y = f(x - a)$, cómo se verá en el siguiente ejemplo. Si $a>0$, la translación es hacia la derecha y si $a<0$, la translación es a la izquierda. Es decir que, si una función $f(x)$ la variable x se reemplaza por $x - a$, el efecto sobre la gráfica de $f(x)$ es trasladar la curva una distancia a paralelamente al eje x, en la dirección positiva.

Ejemplo: Con lo dado en la sección 3.7.1 puede obtenerse la gráfica $y = \cos(x - \pi)$ trasladando $y = \cos x$ una distancia π hacia la derecha de las abscisas (eje x). Una revisión de la Figura 3.18 indicará que está translación produce la gráfica de $y = -\cos x$. También puede presentarse el caso que haya una translación de la curva en la dirección de las y, para una distancia c, por una sustitución de y por $y-c$, asimismo se puede presentar una translación simultánea de x y de y.

3.7.2 Rotación

Continuando con las anteriores sustituciones, se puede presentar tres tipos de rotaciones. Sea *(m, n)* un punto del plano, entonces el punto *P1 (–m,n)* se llama su rotación o imagen en el eje *Y*, es decir que, si *x* se reemplaza por *–x* en la ecuación.

$$y = f(x) \tag{10}$$

La ecuación obtenida, es

$$y = f(-x) \tag{11}$$

Es la rotación de la ecuacion (10) respecto al eje Y, así como el punto *P1 (–m, n)* es la rotación o imagen en el eje *Y*. El punto *P2 (m, –n)* es la rotación en el eje *x*, luego si *y* se reemplazará por *–y* en la ecuación (10) se obtendrá la siguiente expresión.

$$-y = f(-x) \text{ o } y = -f(x) \tag{12}$$

Corresponde a la rotación respecto al eje x. Así como existe rotación en el eje *x* y rotación en el eje *y* también existe rotación en el origen; esto se obtiene si al mismo tiempo se sustituyen *x* por *–x* y *y* por *–y* en la ecuación (10), es decir que

$$-y = f(-x) \text{ o } y = -f(-x) \tag{13}$$

Ejemplo: Encontrar la ecuación que se obtiene de realizaar una rotación respecto al origen de coordenadas para $Y = \cos x$.

Para que ocurra una reflexión en el origen se tiene que

$$-y = \cos(-x) \text{ o } y = -\cos(-x)$$

Pero como la función cos x es una función par, $y = -\cos(-x)$.

Ejemplo: Deducir la ecuación obtenida de $y=\cos x$ por una contracción en la dirección de las x en la razón 1:3, seguida de una translación en la dirección de la x de $\pi/6$ unidades a la derecha y luego seguida de una rotación en el eje x.

Ecuación original	$y = \cos x$
Contracción en x en razon 1:3	$y = \cos 3x$
Traslación π/6 a la derecha de x	$y = \cos 3(x - \pi/6)$
Rotación en el eje x	$y = -\cos 3(x - \pi/6)$

Ejemplo: Describir el cambio de variable o la secuencia de cambios, que conduce de $y = \text{sen } x$ a $y = 3\,\text{sen}[2(x - \pi)]$.

Inicialmente se aplica una expansión en la dirección y en una razón 1:1/3.

$$y/3 = \text{sen } x; \;\; y = 3 \text{ sen } x$$

Una contracción en la dirección x en una razón 1:2

$$y = 3 \text{ sen } 2x$$

Una translación en la dirección x de π unidades a la derecha.

$$y = 3 \text{ sen } 2(x - \pi) = 3 \text{ sen}[2(x - \pi)]$$

3.7.3 Funciones pares e impares

La condición para funciones par e impar consiste en que el cambio de la variable que produce la rotación, dejando inalterada la ecuación y a su vez su representación gráfica. De acuerdo con esto tenemos que: Una función es par si la gráfica de la función $y = f(x)$ rotada con respecto al eje y, se cumple que $f(x) = f(-x)$, entonces $f(x)$ es llamada función par, note que la gráfica al ser rotada con respecto al eje Y está no sufre ninguna variación.

Una función es impar si la gráfica de la función $y = f(x)$ rotada con respecto al origen, se cumple que $-y = f(-x)$, así que $f(x) = f(-x)$, entonces $f(x)$ (x) se llama función impar de x. Obsérvese que la gráfica al ser rotada con respecto al origen, está no sufre ninguna variación.

Ejemplo: Probar que, para $f(x) = cos\ x$, es una función par.

Cómo se puede apreciar en la Figura 3. 18 la variacion de $f(x) = cos\ (x)$ y si esta función es rotada respecto al eje y, no sufre ninguna variación. Entonces $cos\ x$ es una función par de x y podemos decir que, $cos(-x) = cos\ x$, para todo x. Este mismo análisis se puede realizar para las demás cofunciones y funciones dando como resultado que:

$$\left.\begin{array}{l} cos\ x \\ cosec\ x \end{array}\right\} \quad \textit{Función par}$$

$$\left.\begin{array}{l} sen\ x \\ sec\ x \\ tan\ x \\ cot\ x \end{array}\right\} \quad \textit{Función impar}$$

3.7.4 Observaciones

De acuerdo al análisis realizado en las secciones 3.7.1, 3.7.2 y 3.7.3 se pueden concluir aspectos importantes de la trigonometría. Según las herramientas dadas en las anteriores secciones, se puede hallar cualquier cofunción circular. Veamos qué ocurre si a la gráfica de la función $y=sen\ x$ la trasladamos $\pi/2$ a la derecha, es decir que x ya no será la variable dependiente si no $x - \pi/2$ (ver sección 3.8.1), ver Figura 3.25.

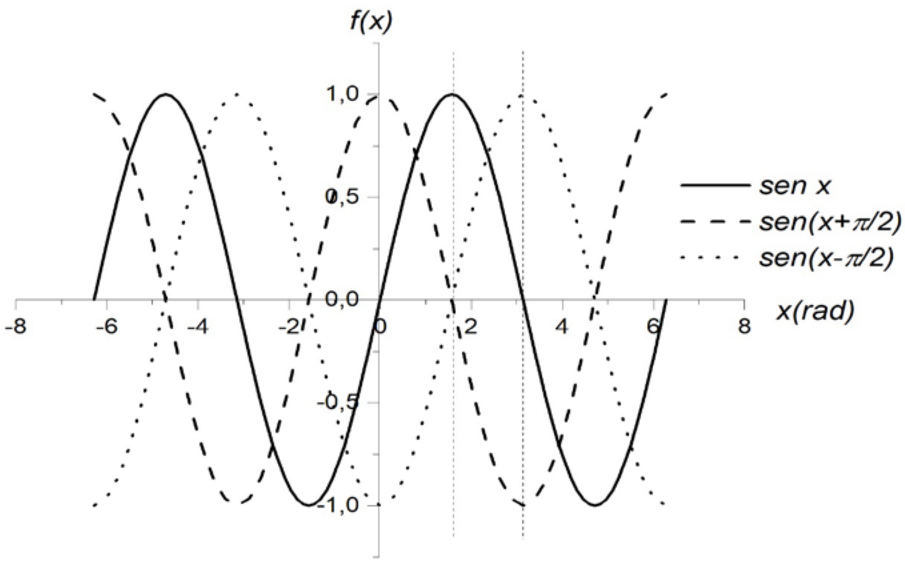


Figura 3.25
Función y = sen(x ± π⁄2).

Nótese que la gráfica de la función *y = sen(x – π/2)* es la misma gráfica de la cofunción del sen x, es decir que *y = cos x*. Analicemos que ocurre si en vez de trasladar *π /2* a la derecha es trasladada a la izquierda; es decir que la gráfica sea *y = sen(x + π/2)* es la cofuncion del *sen x*, es decir rotada respecto al eje *x*. En el caso de la *sec x* ver Figura 3.26, sí es trasladada *π/2* a la derecha, la secante obtenida es,

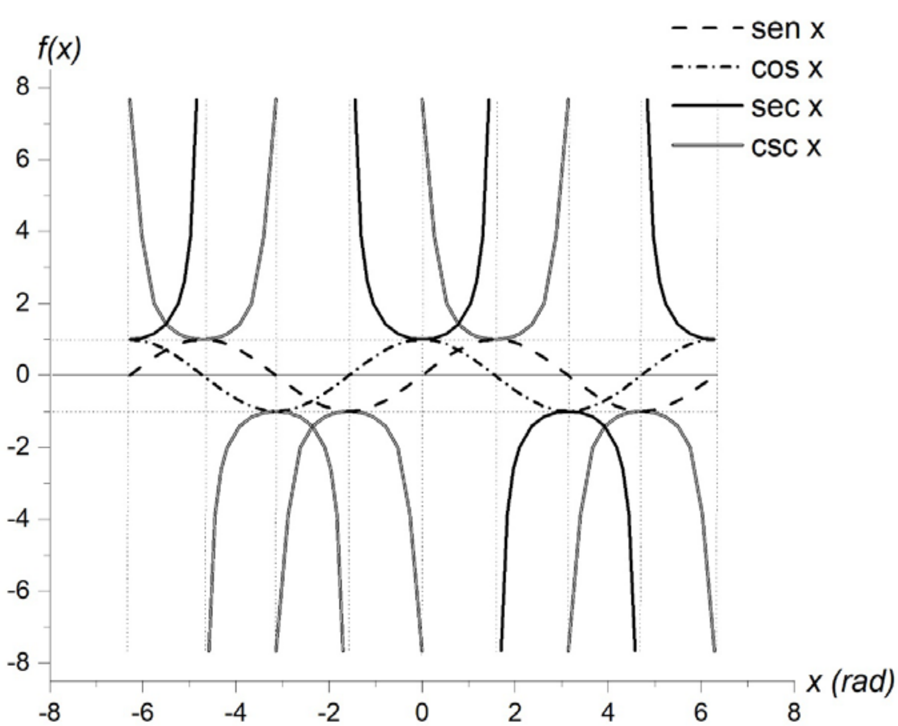


Figura 3.26
Función y = sec(x ± π⁄2).

Luego la *sec x = cosec(x + π/2),* luego la secante es la misma cosecante trasladada π/2 a la izquierda. Las anteriores afirmaciones son también válidas para el caso de la función *tan x* y su cofunción, cómo también para la *sec x* y su cofunción, pero veamos qué ocurre en el caso de la función *tan x*. En el caso de la *tan x*, ver Figura 3.27 si la rotamos con respecto al eje *y*, obtenemos:

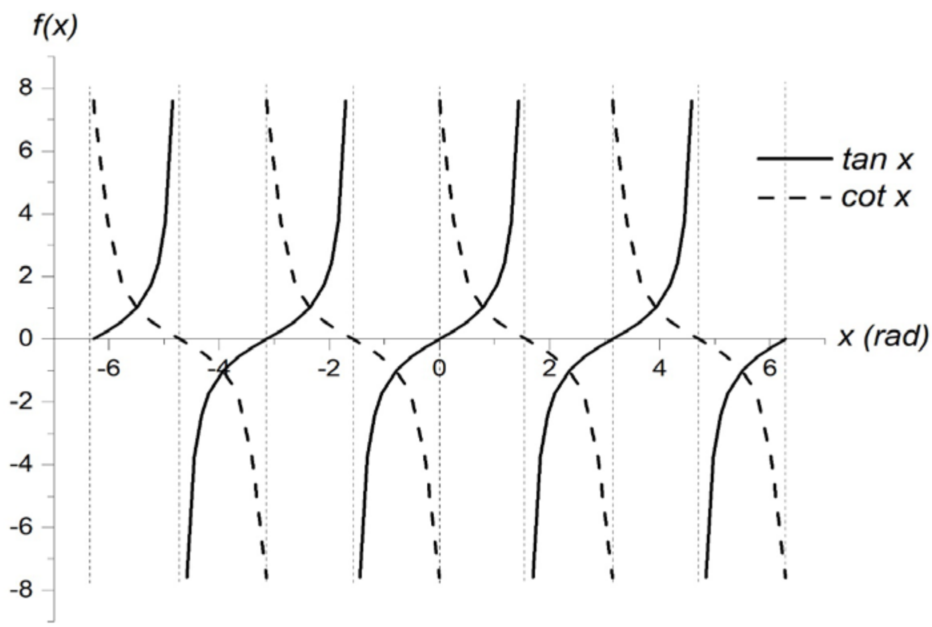


Figura 3.27
Función y = tan(x ± π/2).

Si la *tan x* es rotada con respecto al eje *y*, seria *y=tan x = cot (x – π/2)* luego si transladamos la *tan x* rotada con respecto al eje y una distancia *π/2* a la derecha obtenemos la cofuncion de la *tan x*, es decir *cot x*, es decir *y = – tan(x + π/2)*.

Lo mismo ocurre con la *sec x* y con su cofunción, de lo anterior se puede deducir que:

1. Siempre se va a tener que transladar *π/2* ya sea a la derecha o a la izquierda según sea el caso, observe que siempre será *π/2* porque se quiere ir de la función a la cofunción. Es decir, la cofunción definida por el ángulo complementario, y siempre tendrá que pasar por *π/2*, ver Figura 3.28.

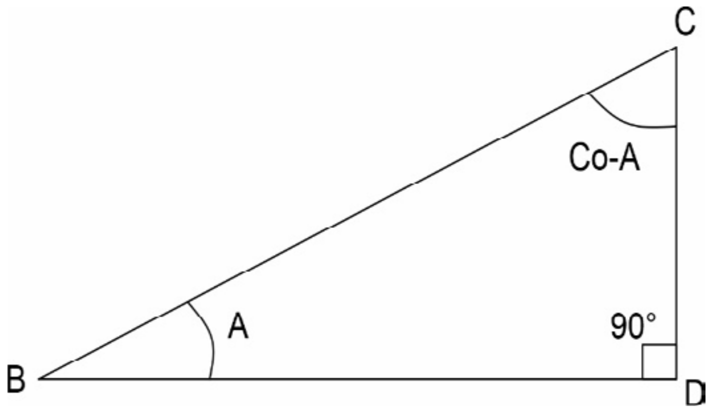


Figura 3.28
Ángulo complementario.

2. La trigonometría se basa en tres funciones que son: el *sen x*, la *tan x* y la *sec x*, ya que de ellas se pueden deducir las demás.

3.8 Funciones circulares inversas

Las funciones circulares no tienen funciones inversas, ya que no son uno a uno. Sin embargo al restringir los dominios, es posible obtener funciones (sobre dominios más reducidos) con el mismo comportamiento de las funciones circulares y que tengan funciones inversas. Garantizaremos la existencia de la función inversa, eligiendo un subconjunto S del dominio de una función circular dada, en el cual la función sea creciente o decreciente; téngase presente que en la escogencia de S la función tomé todos sus valores.

Veamos la función circular *sen x* en el cual el dominio son los reales y el rango es el conjunto $[-1, 1]$ de números reales en el intervalo. En la función *sen x* no es una función uno a uno, ya que por ejemplo: $sen\ x = 1/2$ para valores de $x = 5\pi/6,\ 7\pi/6$ etc. Es decir que para $sen\ x = 1/2$ existen más valores de x tal que se cumplen que $sen\ x = 1/2$, luego no es una función uno a uno. Entonces *sen x* con dominio en los reales y el rango, el intervalo de números reales $[-1,1]$ no tiene inversa. Sea $y = sen\ x$ y si restringimos a *x* en el intervalo [$-\pi/2, \pi/2$] con esto garantizamos que *y* toma los valores entre *-1* y *1* dados en el rango de *sen x*; por lo tanto la nueva función *y = sen x* tiene inversa ya que, *y* es una función uno a uno.

3.8.1 Definición

La función inversa del seno, denotada por arcoseno (*arcsen x*), se define como: *y = arcsen x*, si y sólo si, *sen y = x* donde $-1 < x < 1$ y $-\pi/2 < y < \pi/2$.

Ejemplo

Trazar la gráfica de *y = arcsen x*

Por definición, la gráfica de *y = arcsenx* es la misma qué la gráfica de *sen y = x*, con la única restricción que $-1 < x < 1$ y $-\pi/2 < y < \pi/2$. Nótese que en la Figura 3.29 se encuentran trazadas dos gráficas; la gráfica *y = arcsen x* (línea continua) que en función inversa de "*x = sen y*", donde *x* es definido en el intervalo de números reales *[–1,1]* y cuyo dominio son los números reales, y la relación *y = arcsen x* (línea discontinua) ver Figura 3.29.

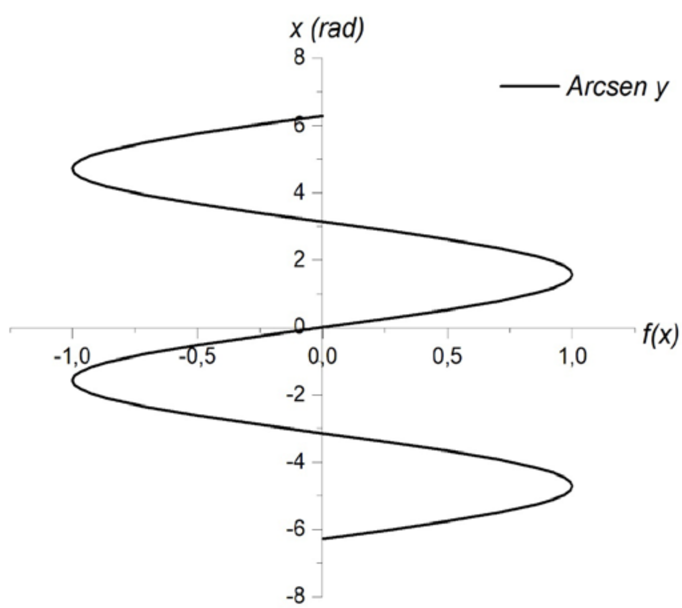


Figura 3.29
Gráfica de arcsen y.

Como una ayuda al lector las gráficas de funciones o relaciones, serán útiles los términos periodo y amplitud que se aplican a las funciones circulares, y los términos periodo inverso y amplitud del inverso a la función inversa.

3.8.2 Definición

La función inversa de la tangente denotada por $y = arctan\, x$ se define como: $y = arctan\, x$, si y sólo si, $tan\, y = x$ donde x es cualquier real y $-\pi/2 < y < \pi/2$, ver Figura 3.30.

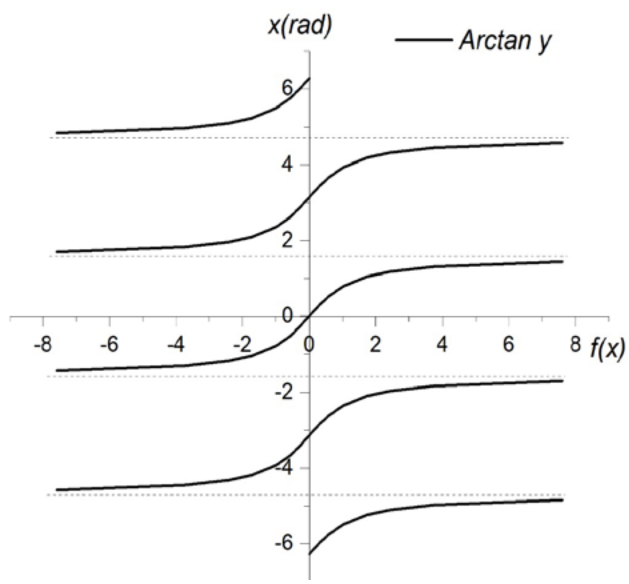


Figura 3.30
Gráfica de arctan y.

De forma similar podríamos definir la inversa de la función circular secante, restringiendo el dominio de la función secante en el intervalo de números reales $[0,\pi]$, garantiza la existencia la función secante.

3.8.3. Definición

La función inversa de la secante, denotada por $y = arcsec\, x$, se define como: $y = arcsec\, x$, si y sólo si, $sec\, y = x$ donde $x>1$ real y $0 \leq y < \pi/2$ y $\pi/2 < y \leq \pi$, ver Figura 3.31.

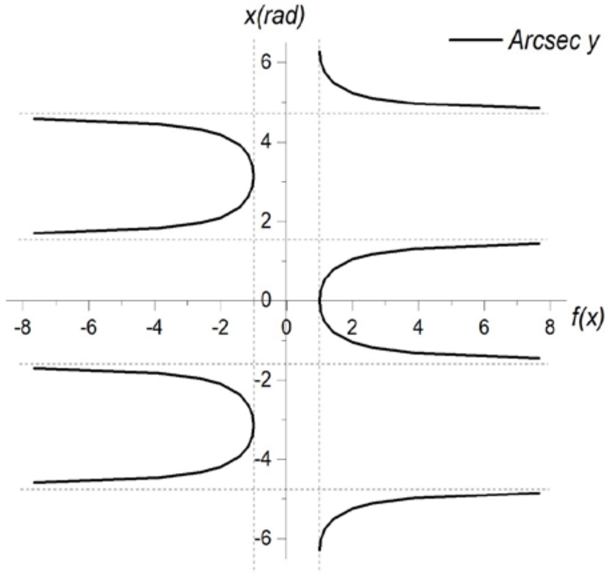


Figura 3.31
Gráfica de arcsec y.

De igual forma podríamos definir la función inversa de las cofunciones circulares cómo arcocoseno, cotangente, cosecante; dadas a continuación

3.9 Co funciones circulares inversas

3.9.1 Definición

La función inversa del coseno, denotada por $y = arccos\, x$, se define como: $y = arcocos\, x$, si y sólo si $cos\, y = x$, donde $-1 \leq x \leq 1$ y $0 \leq y \leq \pi$, ver Figura 3.32.

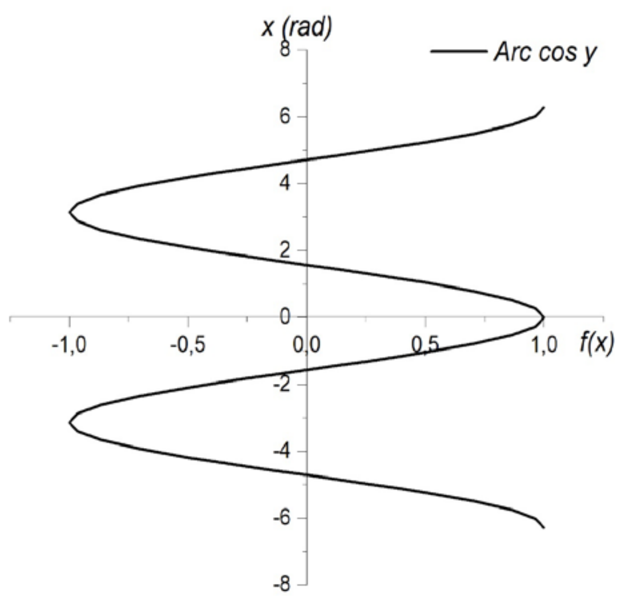


Figura 3.32
Gráfica de arc cos y.

3.9.2 Definición

La función inversa de la cotangente, denotada por $y = arccot\ x$, se define como: $y = arcocot\ x$, si y sólo si $cot\ y = x$, donde x es cualquier real y $0 \leq y \leq \pi$, ver Figura 3.33.

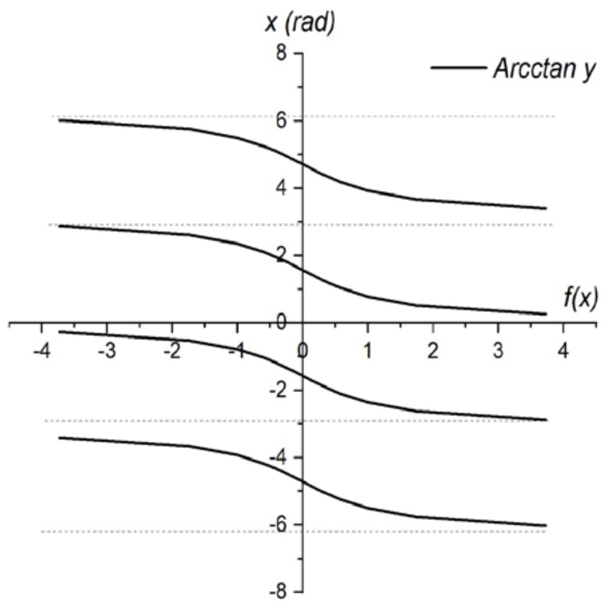
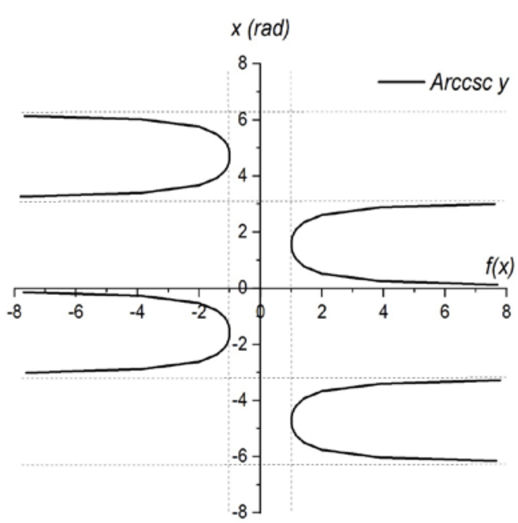


Figura 3.33
Gráfica de arcctan y .

3.9.3 Definición

La función inversa de la cosecante, denotada por $y = arccsc\ x$, se define como: $y = arccsc\ x$, si y sólo si $csc\ y = x$, donde $|x| \geq 1$ es número real y $\pi/2 \leq y < \pi$ y $\pi < y < 3\pi/2$, ver Figura 3.34.

Figura 3.34
Gráfica de arccsc y .



3.10 Los valores principales de las funciones circulares inversas

La multiformidad de las funciones circulares inversas pueden ser frecuentemente en obstáculo. Por lo tanto, nos limitaremos en cada una de estas funciones a un intervalo de valores para el cual sean uniformes, y llamaremos a estos valores “los valores principales” de las funciones circulares inversas. La parte de cada curva determinada por esta elección se llama entonces “rama principal” de la curva. La razón de nuestra elección es que por este medio la suma de los valores principales de una función inversa y de la cofuncion inversa es ahora , qué es consistente y más general que la notación dada por algunos autores; los intervalos para estos valores principales.

$$-\pi \leq arcsen\, x \leq \pi/2\,; \qquad 0 \leq arccos\, x \leq \pi$$

$$-\pi/2 \leq arctan\, x \leq \pi/2\,; \qquad 0 \leq arctan\, x \leq \pi$$

$$0 \leq arcsec\, x < \pi/2 \text{ ó } \pi/2 < arcsec\, x \leq \pi; \qquad \pi/2 \leq arccsc\, x < \pi \text{ ó } \pi < arccsc\, x \leq 3\pi/2$$