Partido Comunista de Cuba (2016): Plan nacional de desarrollo económico y social hasta 2030: Propuesta de visión de la nación, ejes y sectores estratégicos. VII Congreso del PCC. La Habana, 2016.

Pedersen, Paul M & Thibault, Lucie (2014): *Contemporary Sport Management. Fifthy Edition, Editorial HUMAN KINETICS.*

Wohlfart, O., & Adam, S. (2019): *New Age of Sport Management Education in Europe: Research Project under the Erasmus + Programme.*(NASME). Download date: 17. Jul. 2020.

CAPÍTULO 2 Didácticas Generales y particulares en la Formación Universitaria"

LOS PROCEDIMIENTOS ALGORÍTMICOS EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA SUPERIOR

Autores

M Sc. Marilú Jorge Martín.
marilu.jorge@umcc.cun https://orcid.org/0000-0001-6860-6277
Universidad de Matanzas

M. Sc. Walter Naveira Carreño.
walter.naveira@umcc.cu https://orcid.org/0000-0003-2089-901X
Universidad de Matanzas

Dr. C. María de los Ángeles Valdivia Sardiñas
maria.valdivia@umcc.cu https://orcid.org/0000-0002-0139-5468
Universidad de Matanzas

M. Sc. Mariam Perdomo Jorge.
mariam.perdomo@umcc.cu https://orcid.org/0000-0003-0091-1202
Universidad de Matanzas

RESUMEN

En la enseñanza de la Matemática son muy utilizados los procedimientos de solución como recurso didáctico para dar solución a ejercicios de aplicación a la práctica y en la formación de conceptos. En este trabajo se muestra el uso de los procedimientos algorítmicos como método para la dirección del proceso de enseñanza-aprendizaje del cálculo integral, en particular, en la integración de las funciones racionales y el método de descomposición en fracciones simples. Las consideraciones realizadas en este trabajo contribuyen a una mejor orientación hacia los procedimientos de solución y su incidencia en el aprendizaje de los estudiantes. La importancia del trabajo radica en la utilización de los procedimientos algorítmicos en la enseñanza de la Matemática Superior. Se utilizaron algunos métodos teóricos y empíricos para realizar la investigación.

ISBN 978-1-957395-02-9
Primera Edición, enero de 2022

Palabras clave: procedimientos algorítmicos, enseñanza, matemática, cálculo integral
Abstract
In the teaching of Mathematics, solution procedures are widely used as a didactic resource to solve exercises of application to practice and in the formation of concepts. This work shows the use of algorithmic procedures as a method for the direction of the teaching-learning process of integral calculus, in particular, in the integration of rational functions and the method of decomposition into simple fractions. The considerations made in this work contribute to a better orientation towards solution procedures and their impact on student learning. The importance of the work lies in the use of algorithmic procedures in the teaching of Higher Mathematics. Some theoretical and empirical methods were used to carry out the research.
Key words: algorithmic procedures, teaching, mathematics, integral calculus

INTRODUCCIÓN

Los procedimientos de solución son acciones que se ejecutan en el contenido matemático con la finalidad de resolver un problema de la ciencia matemática, de otra ciencia, o de la práctica. Estos procedimientos se enseñan en las clases de Matemática, donde adquieren una estructuración didáctica, orientada al cumplimiento de los objetivos de la asignatura (Naveira-Carreño et al., 2021).

En la enseñanza de la Matemática son muy utilizados los procedimientos que tienen como base un algoritmo, en cálculos aritméticos y algebraicos; así como los procedimientos de carácter heurístico en la solución de ejercicios de aplicación a la práctica y de demostración. La didáctica de la matemática cubana (Ballester-Pedroso et al., 2018) reconoce la existencia de los procedimientos de solución como una categoría que integra a los procedimientos heurísticos y a los procedimientos algorítmicos.

En particular, en la enseñanza de la Matemática Superior, los procedimientos de solución que se abordan en el cálculo diferencial e integral requieren niveles de integración tal que resulta muy complejo clasificarlos únicamente como heurísticos o algorítmicos. En este proceso se tratan tareas que exigen un elevado trabajo heurístico en función de su comprensión, sin embargo, su solución final siempre llega a partir de la aplicación de algoritmos.

DESARROLLO

Los procedimientos algorítmicos en la enseñanza de la Matemática

En la enseñanza de la Matemática, se emplean con mucha frecuencia algoritmos para resolver diversas tareas. El término algoritmo cobró fortaleza durante el siglo XX con el desarrollo de las ciencias de la computación, en las que este concepto es cardinal. La enseñanza de la Matemática no quedó exenta de este proceso y los algoritmos se han empleado también en ella, pero existe una diferencia que es considerable. En el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática se persigue la educación de los individuos que componen la sociedad, los cuales están permeados por sus propias experiencias y poseen una personalidad que se torna única e irrepetible, por lo que cada uno adquiere un alto nivel de individualidad. Ellos pueden cuestionarse el orden y el contenido de las acciones del algoritmo, de manera que pueden llegar a otros algoritmos que logren resolver un determinado problema, los cuales pueden diferir del enseñado por el profesor en cuanto a complejidad y eficiencia.

ISBN 978-1-957395-02-9
Primera Edición, enero de 2022

En el contexto didáctico se emplea el término Sucesión de Indicaciones con Carácter Algorítmico (SICA). Este concepto usado en la enseñanza de la Matemática fue definido por autores cubanos como "… una sucesión de órdenes o indicaciones para realizar cierto sistema de operaciones en un orden determinado, que inducen a operaciones unívocas, rigurosamente determinadas y del mismo tipo en aquellos individuos hacia los cuales está dirigida" (Ballester-Pedroso et al., 1992, p. 246).

El mismo autor afirma la importancia de que estos procedimientos no sean vistos por los estudiantes como elementos mecánicos, debido a los efectos negativos que puede traerle al adecuado desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje, por lo que resulta imprescindible que tanto el profesor como los estudiantes concienticen la importancia que tienen estos procedimientos en su aprendizaje. Para ello el profesor debe lograr que en la elaboración de una SICA los estudiantes sean partícipes de dicho proceso.

La elaboración de una sucesión de indicaciones con carácter algorítmico debe llevarse a cabo de manera flexible, de modo que no se favorezcan elementos mecanicistas en el trabajo de los estudiantes, sino que estos sean capaces de comprender la elaboración gradual que se ha realizado de dicha sucesión de indicaciones; para ello es conveniente el empleo de programas heurísticos.

Programa heurístico para la obtención de una SICA

De acuerdo con Ballester et al., (1992) para la obtención de una SICA se puede emplear el siguiente programa heurístico:

1. Orientación hacia el problema.
- Asegurar los conocimientos necesarios que sirven de base al nuevo conocimiento.
- Motivación.
- Orientación hacia el objetivo.
2. Trabajo en el problema.
- Precisión del problema.
- Trabajo en la búsqueda de la sucesión de indicaciones.
3. Solución del problema.
- Determinación de la sucesión de indicaciones.
4. Evaluación de la solución y de la vía.

En cada una de estas fases se emplean convenientemente principios y reglas heurísticas (Jorge-Martín, M., Fundora-Rolo, A., 2020) que permitan cumplir con las tareas de cada una. Resulta importante destacar que la solución del problema tiene lugar cuando se determina la sucesión de indicaciones con carácter algorítmico expresada en forma clara y concisa. Existen diversas formas en las que se puede representar una sucesión de indicaciones con carácter algorítmico, estas son: frases, fórmulas, esquemas, ilustración gráfica, diagramas, o mediante un programa informático.

Estas formas realizan una importante contribución a la fijación de la sucesión de indicaciones con carácter algorítmico por parte de los estudiantes, de manera que el componente visual juega un importante papel en dicha fijación producto de las características de algunas de las formas de representación que se refieren, las cuales constituyen medios auxiliares heurísticos (Jorge-Martín,

ISBN 978-1-957395-02-9
Primera Edición, enero de 2022

M., Fundora-Rolo, A., 2020) en el proceso de enseñanza-aprendizaje de los procedimientos algorítmicos.

Obtención de una Sucesión de Indicaciones con Carácter Algorítmico para el tratamiento del método de integración de funciones racionales.

1. Orientación hacia el problema

Aseguramiento del nivel de partida

P: Se comienza con la reactivación de la definición de primitiva de una función y las variaciones que tiene el procedimiento para su cálculo en función de la naturaleza de la expresión analítica de dicha función. Se recuerda a los estudiantes que hasta el momento se han estudiado dos métodos de integración.

A: integración por sustitución e integración por partes.

Motivación y Orientación hacia el objetivo

Hasta el momento el estudiante sabe cómo encontrar la primitiva de funciones que tienen la forma $y = f[g(x)].\,g'(x)$ mediante el método de sustitución, o la forma $y = u\,dv$ (con u y v funciones de x), mediante el método de integración por partes. La pregunta es:

P: ¿Se podrá encontrar una primitiva de la función $y = \frac{x+11}{x^2-2x-15}$ utilizando alguno de estos métodos? Para ello se plantea la siguiente situación: Determina $\int \frac{x+11}{x^2-2x-15}\,dx$

A: Intentan calcular la integral indefinida con los métodos conocidos y se percatan de la dificultad. La función integrando no cumple con los requisitos de la función integrando de ninguno de los dos métodos.

En este punto, se declara que se va a desarrollar un método de integración para funciones racionales. Para alcanzar este objetivo es necesario realizar diversas acciones de transformación en función de develar nuevos elementos que permitan realizar este trabajo. *<RH> Analizar qué acciones de identificación o de transformación es necesario realizar para alcanzar el objetivo deseado.*

2. Trabajo en el problema

Precisión del problema

Como se conoce, una función racional es el cociente de dos funciones polinómicas. Por ejemplo: $\frac{1}{x-2}$; $\frac{x}{x^2+4}$; $\frac{2x^2+4x+1}{x^4+5x^2+1}$; $\frac{3x+1}{(x+2)(x-1)}$; $\frac{x^3-7x+1}{x^3-1}$, son funciones racionales. Hacer la observación que solo interesa el caso en que la función $\frac{P(x)}{Q(x)}$ sea irreducible, o sea, el caso en que P(x) y Q(x) no tengan ceros comunes, ya que antes de integrar, los factores comunes en la descomposición de P(x) y Q(x) se simplifican.

Este método se basa en descomponer la función como suma de una función polinomial y un número finito de ciertas funciones racionales, cuyas integrales son relativamente sencillas de calcular. ¿Cuáles son estos tipos de funciones racionales?

Definición: Una función racional es una *fracción simple*, si es de alguno de los cuatro tipos siguientes:

ISBN 978-1-957395-02-9
Primera Edición, enero de 2022

a) $\frac{A}{x-a}$ b) $\frac{A}{(x-a)^n}$ c) $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$ d) $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$

donde A, B, a, p, q son números reales, n es un número natural, n≥2 y $p^2 - 4q < 0$. (Rodríguez-Macías, R., et al, 1988, p.149)

P: Propone ejemplos de integrales que tienen esta forma para que sean calculadas por los estudiantes.

A: Resuelven las integrales utilizando el método de sustitución.

a) $\int \frac{5}{x-2} dx$ R/ $5 \ln|x-2| + c$

b) $\int \frac{2}{(x-4)^2} dx$ R/ $\frac{-2}{x-4}$ +c

c) $\int \frac{dx}{x^2+4}$ R/ $\frac{1}{2} arc\ \tan \frac{x}{2} + c$

d) $\int \frac{x+1}{(x^2+2x+4)^3} dx$ R/ $-\frac{1}{4} \frac{1}{(x^2+2x+4)^2} + c$

Una vez que ya se conoce cómo integrar las fracciones simples, veamos cómo es posible expresar una función racional arbitraria en términos de estos tipos de fracciones simples.

P: ¿Qué relación existe entre el numerador y el denominador en las funciones dadas?

<PH> Búsqueda de relaciones y dependencias.

A: El grado del polinomio del numerador en todos los casos es menor que el grado del polinomio del denominador.

P: ¿Cómo se clasifican las funciones racionales que cumplen esta condición? *<RH> Recordar conceptos del dominio matemático.* (Rodríguez-Macías, R., et al, 1988, p.153)

A: Propias.

P: ¿Cuándo son impropias?

A: Cuando el grado del polinomio del numerador es mayor o igual que el grado del polinomio del denominador.

P: ¿Es posible transformar una función racional impropia en propia? ¿Cómo?

A: Sí, mediante la división de polinomios. (Rodríguez-Macías, R., et al, 1988, p.154)

Dadas dos funciones polinomiales p(x) y d(x) de grados m y n respectivamente, con m≥n, existen dos funciones polinomiales q(x) y r(x) únicas, tales que p(x)=q(x)d(x)+r(x) y el grado de r(x) es menor que n. (Rodríguez-Macías, R., et al, 1988, p.123, Primera Parte)

Teorema: Toda función racional impropia puede ser expresada en forma única como la suma de una función polinomial y una función racional propia. (Rodríguez-Macías, R., et al, 1988, p.154)

P: ¿Cómo se procede para dividir dos polinomios? *<RH> Recordar teoremas del dominio matemático.*

A: El algoritmo para dividir dos polinomios, es similar a la del algoritmo utilizado para dividir números enteros; donde p(x) es el dividendo, d(x) el divisor, q(x) el cociente y r(x) el resto.

P: ¿Será posible descomponer una función racional propia en fracciones simples? ¿Cómo se debe proceder? *<PH> Variación de condiciones.*

ISBN 978-1-957395-02-9
Primera Edición, enero de 2022

Si sabemos que: $\frac{3}{x+2}+\frac{4}{(x-1)^2}=\frac{3x^2-2x+11}{(x+2)(x-1)^2}$, entonces $\frac{3x^2-2x+11}{(x+2)(x-1)^2}$ puede ser descompuesta en la suma $\frac{3}{x+2}+\frac{4}{(x-1)^2}$. Luego:

Teorema: Toda fracción racional propia $\frac{P(x)}{Q(x)}$ puede ser expresada, en forma única, como la suma de un número finito de fracciones simples (Rodríguez-Macías, R., et al, 1988, p.154)

Esta descomposición está determinada por la descomposición en factores del polinomio $Q(x)$ la cual se sustenta en el siguiente teorema:

Todo polinomio $Q(x)$ de coeficientes reales $Q(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ se descompone de modo único en forma de un producto de su coeficiente principal a_0, de un número finito de polinomios de la forma $x-a$, correspondientes a sus raíces reales y de un número finito de polinomios de la forma x^2+px+q, correspondiente a sus raíces no reales. (Rodríguez-Macías, R., et al, 1988, p.126, Primera Parte)

Se considera conveniente señalar que si $a_0=1$, solamente los polinomios de la forma $x-a$ y los de la forma x^2+px+q con $p^2-4q<0$, no se descomponen en fracciones de menor grado.

Trabajo en la búsqueda de la sucesión de indicaciones

En RESUMEN, el polinomio $Q(x)$, denominador de la fracción racional propia $\frac{P(x)}{Q(x)}$ se descompone de forma única en factores de la forma $x-a$ correspondientes a sus raíces reales y en factores de la forma x^2+px+q ($p^2-4q<0$), correspondiente a sus raíces no reales.

Se puede establecer que a cada factor de la forma $(x-a)^k$, de la descomposición del denominador de la fracción racional propia, le corresponde un conjunto de k fracciones simples:

$$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{K}{(x-a)^k}$$

Y para cada factor de la forma $(x^2+px+q)^m$ un conjunto de m fracciones simples:

$$\frac{Ax+B}{x^2+px+q}+\frac{Cx+D}{(x^2+px+q)^2}+\cdots+\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}$$

donde todos los coeficientes son números reales.

A: $x^2-2x-15=(x-5)(x+3)$, por lo que: $\frac{x+11}{x^2-2x-15}=\frac{A}{x-5}+\frac{B}{x+3}$

P: Se hace evidente la necesidad de conocer el valor de A y B. ¿Qué propiedad de los polinomios puede emplearse para calcular estos valores? *<RH> Recordar teoremas del dominio matemático correspondiente*

A: Mediante la igualdad de polinomios

P: Calcular los valores de A y B. Método de los coeficientes indeterminados (Rodríguez-Macías, R., et al, 1988, p.155-156)

$\frac{x+11}{x^2-2x-15}=\frac{A}{x-5}+\frac{B}{x+3}=\frac{A(x+3)+B(x-5)}{(x-5)(x+3)}=\frac{Ax+3A+Bx-5B}{(x-5)(x+3)}$ de aquí se infiere que:

ISBN 978-1-957395-02-9
Primera Edición, enero de 2022

$x + 11 = Ax + 3A + Bx - 5B$

$x + 11 = x(A + B) + (3A - 5B)$ por igualdad de polinomios se forma el sistema:

A: $\begin{matrix} A + B & = 1 \\ 3A - 5B & = 11 \end{matrix}$

$A = 1 - B$, por lo que $3(1 - B) - 5B = 11$

$-3B - 5B = 11 - 3$

$-8B = 8$

$B = -1$, por lo que $A = 2$

De ahí que $\frac{x+11}{x^2-2x-15} = \frac{2}{x-5} - \frac{1}{x+3}$

El profesor debe proponer un ejemplo de descomposición en fracciones simples para cada uno de los tres casos restantes.

3. Solución del problema

Determinación de la sucesión de indicaciones con carácter algorítmico

Se debe evidenciar que una vez que se ha realizado la descomposición en fracciones simples, estas son fáciles de integrar por separado, lo cual permite dar solución a la integral planteada.

P: A partir de lo que se ha realizado elaboren un esquema que resuma el procedimiento que se debe emplear para calcular la integral de una función racional.

Los alumnos deben proponer un esquema como el siguiente:

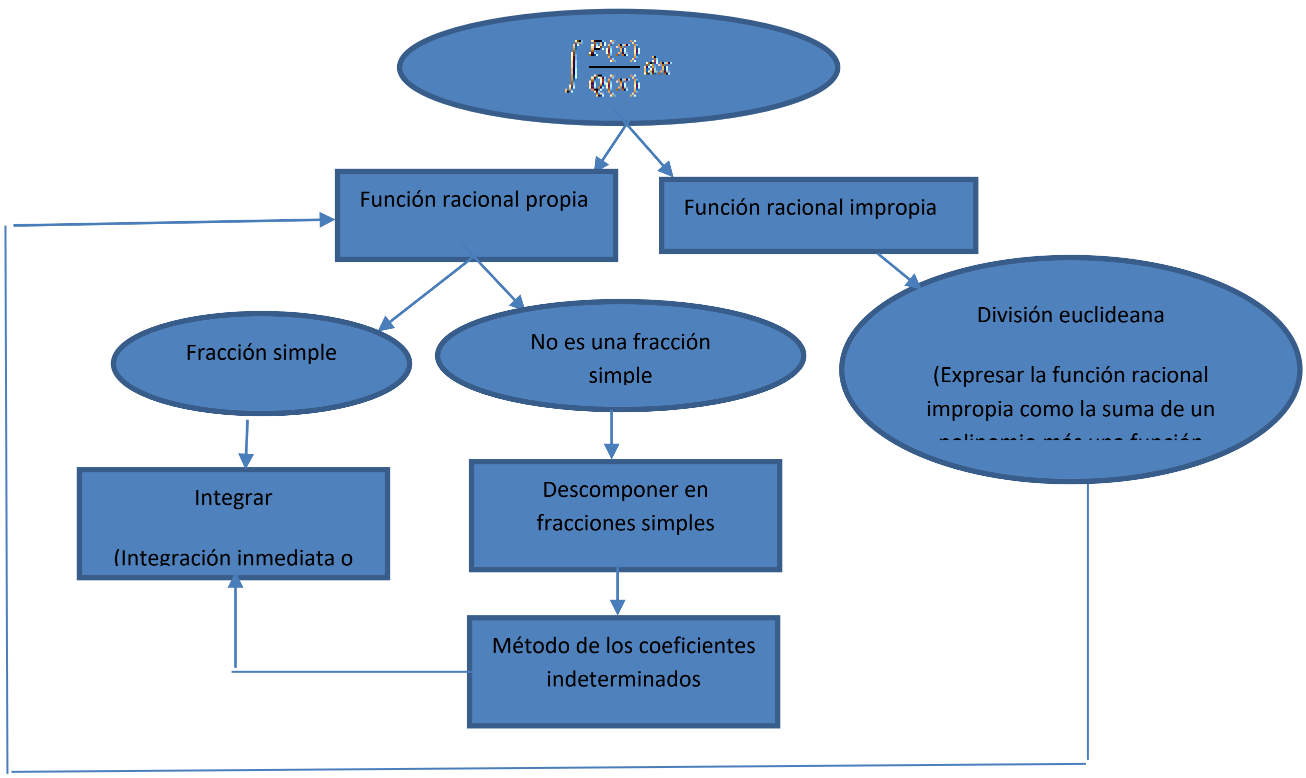

Diagrama de flujo para el método de integración de funciones racionales

4. Evaluación de la solución y de la vía

ISBN 978-1-957395-02-9
Primera Edición, enero de 2022

Se debe reflexionar con los estudiantes acerca de cómo se ha procedido a fin de contribuir con la formación del pensamiento algorítmico de estos. Para ello se pueden realizar preguntas como:

- ¿Cómo se denomina este procedimiento?
- ¿Para qué se emplea?
- ¿En qué consiste el procedimiento obtenido?

Fijación de las Sucesiones de Indicaciones con Carácter Algorítmico

Un aspecto que resulta esencial en el proceso de enseñanza-aprendizaje de los procedimientos algorítmicos es la fijación de las SICA. Este elemento se considera como un proceso parcial de esta situación típica y transcurre en correspondencia con la obtención de la SICA. El elemento que permite el paso de la obtención a la fijación es la representación de la SICA. A decir de Ballester et al. (1992), las SICA se pueden representar mediante diversas maneras como frases, fórmulas, diagramas, entre otras.

CONCLUSIONES

Los resultados de esta investigación, nos indican que aún se debe continuar trabajando en la aplicación de los procedimientos de solución en la enseñanza de la Matemática Superior. Los mismos son de gran utilidad ya que los profesores logran en sus estudiantes independencia cognoscitiva, comportamiento como sujetos creativos, audacia y originalidad, además de contribuir al desarrollo de las formas de trabajo y de pensamiento de la matemática y su aplicación en otras ciencias.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ballester-Pedroso, S., et al. (2018). *Didáctica de la Matemática* (Tomo I). La Habana: Editorial Felix Varela.

Ballester-Pedroso, S., et al. (1992). *Metodología de la Enseñanza de la Matemática* (Vol. 1). La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Jorge-Martín, M., Fundora-Rolo, A. (2020). *Los elementos heurísticos en la clase de matemática superior.* IX Congreso Internacional Educación y Pedagogía. Matanzas, Cuba.

Jorge-Martín, M., Valdivia-Sardiñas, M. (2019). *Estrategias para resolver problemas de optimización en carreras de ciencias técnicas.* VII Simposio Internacional Educación y Pedagogía. Matanzas, Cuba.

Naveira-Carreño, W., et al. (2021). *Los procedimientos heurísticos en la formación del concepto de derivada en economía.* X Congreso Internacional Educación y Pedagogía. Redipe. Matanzas, Cuba.

Rodríguez-Macías, R., et al. (1988). *Cálculo diferencial e integral.* Segunda parte. Editorial Pueblo y Educación. La Habana.

LA MOTIVACIÓN POR APRENDER MATEMÁTICA EN EL CURSO A DISTANCIA DE LA EDUCACIÓN SUPERIOR

M. Sc. Boris Alvarez González

boris.gonzalez@umcc.cu https://orcid.org/0000-0002-1139-360X

Universidad de Matanzas

ISBN 978-1-957395-02-9

Primera Edición, enero de 2022