

Consigna: Escribe diez deseos o aspiraciones que quieres lograr en tu vida. Ordénalos según la importancia que poseen para ti.

1. _____
2. _____
3. _____
4. _____
5. _____
6. _____
7. _____
8. _____
9. _____
10. _____

Escribe una composición acerca del primer deseo.

NOTA: Aclarar que se trata de deseos que sean realmente importantes para la persona (no incluir necesidades inmediatas tales como: necesidades de agua, alimentos u otras).

SECCIÓN 2 DIDÁCTICA, INNOVACIÓN Y DESARROLLO DE LA SUPERACIÓN

1.

LOS PROCEDIMIENTOS HEURÍSTICOS EN LA BÚSQUEDA DE TEOREMAS

Dr. C. Walter Jesús Naveira Carreño

<https://orcid.org/0000-0003-2089901X> walter.naveira@umcc.cu

Universidad de Matanzas

Resumen

El aprendizaje de teoremas es una de las características distintivas del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática. Estas proposiciones de carácter universal y validez asegurada mediante un proceso de demostración realizan especiales aportes al desarrollo del pensamiento de los estudiantes. Los teoremas y demostraciones en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática constituyen una de sus situaciones típicas. En este curso se presta atención al primero de los procesos parciales de esta situación típica: la búsqueda de teoremas. La ponencia se estructura a partir del abordaje teórico de la búsqueda de teoremas con base en el empleo de procedimientos heurísticos.

Palabras clave: Procedimientos heurísticos, Búsqueda de teoremas.

Abstract

Theorem's learning is one of the distinctive characteristics of Mathematics teaching-learning process. This proposition has universal character, and its value based on a demonstration process which makes specials contributions to students thinking development. Theorems and demonstrations in Mathematics teaching learning-process are one of its typical situations. This course is intended for explain the first one of this typical situation's partial process: the finding of theorems. The work is built on the employ of heuristics procedures in the finding of theorems.

Key words: Heuristics procedures, Finding of theorems.

INTRODUCCIÓN

El contenido de enseñanza aprendizaje de la disciplina Matemática, muy relacionados entre sí en cualquier nivel educativo, lo constituyen los conceptos y sus definiciones, los procedimientos de solución y las proposiciones. El trabajo con proposiciones matemáticas ofrece altas potencialidades para el desarrollo del

pensamiento de los aprendices de esta disciplina. Por lo que buscar proposiciones matemáticas y verificar su validez o no, se realiza como una invariante de su aprendizaje. Son justamente aquellas proposiciones matemáticas que son validadas por un riguroso proceso de demostración las que se denominan teoremas.

Tanto la búsqueda de la proposición como la demostración de su validez para clasificarla como teorema, son considerados en la Didáctica de la Matemática cubana como problemas en sentido amplio. Es por ello que deben emplearse los recursos heurísticos a su disposición y aprovechar las potencialidades de esta búsqueda no solo para el aprendizaje de teoremas, sino también para fortalecer la instrucción heurística en los estudiantes.

El presente trabajo tiene como objetivo argumentar el proceso de búsqueda de teoremas a partir del empleo de procedimientos heurísticos para lo que se ofrece un ejemplo de un contenido vinculado al cálculo diferencial e integral.

Los procedimientos heurísticos en la enseñanza de la Matemática

Los procedimientos de solución que se clasifican como heurísticos tienen lugar cuando no se conoce un algoritmo que resuelva una tarea matemática dada. El propio origen de la palabra heurística refiere su relación con procesos de búsqueda y descubrimiento, por lo que los procedimientos heurísticos están encaminados al hallazgo de relaciones y dependencias que se dan entre los elementos que componen una tarea, cuyo conocimiento permite modificar las condiciones hacia casos más favorables o conocidos donde sea posible considerar analogías con otras tareas ya resueltas.

Es posible apreciar que tales procedimientos de búsqueda no se limitan a la resolución de un ejercicio, sino que se pueden extender a casos más generales como: la formación (por deducción, inducción o construcción) de un concepto, la búsqueda de un teorema (por vía deductiva o reductiva), la demostración de un teorema, la obtención de un algoritmo para la solución de una clase de tareas matemáticas, o la resolución de un problema matemático o que se pueda modelar a partir de la Matemática. Estos casos son procesos parciales de las situaciones típicas de la enseñanza de la Matemática (Naveira Carreño, 2022). Cada una de ellas se puede considerar como un problema, por lo que se demanda el empleo de los procedimientos heurísticos en su resolución.

A partir de la complejidad que poseen los procedimientos heurísticos estos se dividen en principios, reglas y estrategias heurísticas. Los principios heurísticos "... casi nunca aparecen de forma aislada, sino que al emplear las formas de trabajo y de pensamiento de la Matemática se combinan y vinculan unos con otros" (Curbeira-Hernández et al., 2019; Elías-Chanchí et al., 2020; Fernández-Doural et al., 2020; Naveira-Carreño et al., 2021; Naveira Carreño, 2022; Parra-Aguilera et al., 2017). Los principios heurísticos a menudo se complementan con las reglas heurísticas, ellas "... tienen carácter de impulsos dentro del proceso de búsqueda de nuevos conocimientos y la resolución de problemas" (Andrés-Romano, 2019; Ballester-Pedroso et al., 2018; Ballester-Pedroso et al., 1992; Fernández-Suárez et al., 2019). Las reglas se diferencian de los principios por su alcance, esto es: las reglas no indican de forma instantánea la solución o la vía, sino que sugieren acciones o recomendaciones.

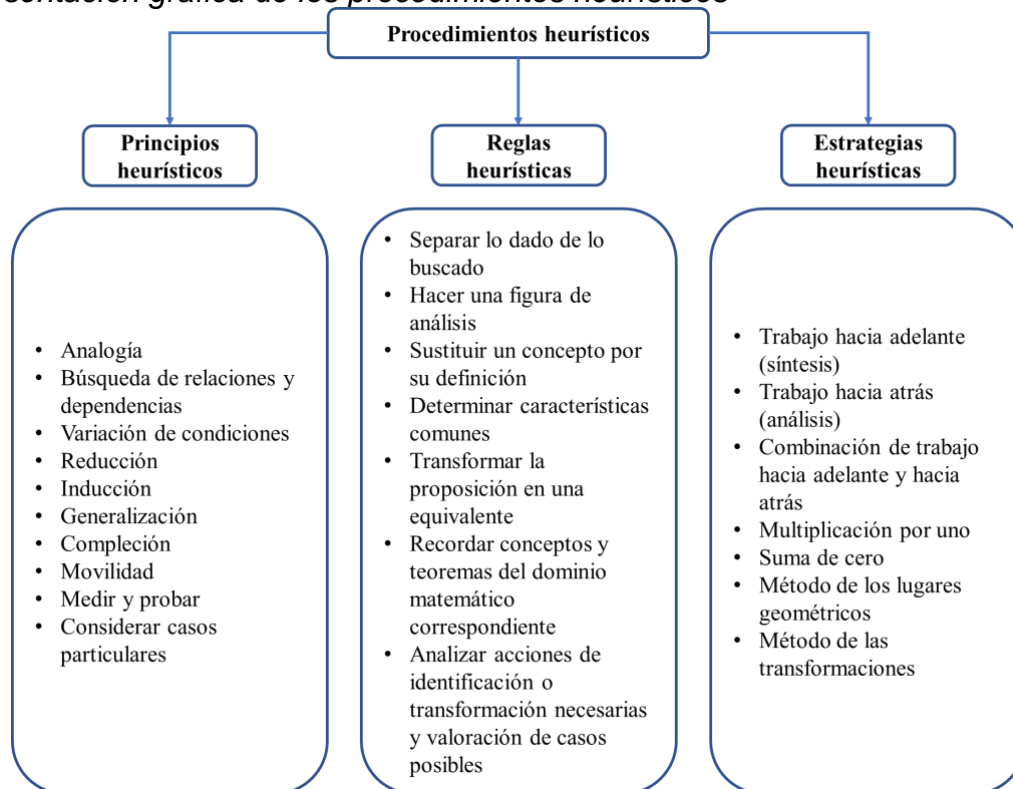
En algunos casos los estudiantes deben ser capaces de discernir si es conveniente utilizar una regla heurística en un determinado momento de la solución del problema o de la búsqueda del nuevo conocimiento. Estas se utilizan durante la clase con regularidad con el fin de orientar el pensamiento de los estudiantes al brindarlas como sugerencias, indicaciones o en forma de preguntas o impulsos. Es importante

que el profesor sea capaz de enseñar a los estudiantes a trabajar con estas reglas, lo cual favorece el desarrollo de la independencia de los alumnos para resolver determinados ejercicios y problemas, además de aumentar su capacidad para adquirir nuevos conocimientos de manera independiente.

Las estrategias heurísticas "... constituyen los procedimientos principales para buscar los medios matemáticos concretos que se necesitan para resolver un problema en sentido amplio" (Ballester Pedroso et al., 1992, p. 236) y para buscar su idea de solución. Dentro de las estrategias heurísticas se destacan dos que tienen carácter general y que se aplican en la solución de diferentes problemas, ellas son el trabajo hacia adelante y el trabajo hacia atrás. Existen otras estrategias que se refieren a determinados tipos de ejercicios, entre ellas se encuentran: la suma de ceros, la multiplicación por uno, el método de las transformaciones, el método de los lugares geométricos, entre otras. La siguiente figura muestra los principales procedimientos heurísticos que se emplean en la clase de matemática.

Figura 1

Representación gráfica de los procedimientos heurísticos



Fuente: Naveira Carreño (2022)

Otro recurso heurístico que deben dominar tanto estudiantes como profesores son los programas heurísticos. Estos le ofrecen al profesor un instrumento para la dirección del proceso de enseñanza-aprendizaje y al estudiante una manera de proceder ante la solución de tareas matemáticas complejas y exigentes. En la Didáctica de la Matemática se cuenta con programas heurísticos orientado al tratamiento en particular de cada situación típica, así como un programa heurístico general que contiene a los anteriores como casos específicos. La estructura del programa heurístico general es:

Tabla 1

Estructura del programa heurístico general

Fases fundamentales	Tareas principales
1. Orientación hacia el problema	- Comprensión del problema

2. Trabajo en el problema	- Búsqueda de la idea de solución <ul style="list-style-type: none"> • Reflexión sobre los medios • Reflexión sobre la vía
3. Solución del problema	- Ejecución del plan de solución
4. Evaluación de la solución y de la vía	- Comprobación de la solución - Reflexión sobre los métodos aplicados

Fuente: Ballester et al. (1992, p. 239)

Este programa heurístico general constituye una excelente vía para el proceso de enseñanza-aprendizaje de diversas situaciones que se consideran como problemas. La afirmación anterior se sustenta en el hecho de que este tiene sus orígenes en los trabajos de Polya sobre la Heurística Moderna y en resultados referenciados desde la Matemática de la escuela alemana (Jungk, 1981; Müller, 1987, 1988; Polya, 1982; Zilmer, 1981), desde el punto de vista cognitivo organiza la actividad del alumno en una etapa para orientación, dos etapas para la ejecución, una externa y otra interna y una etapa para el control, este ordenamiento responde, además, a la teoría de la formación por etapas de las acciones mentales de Y. A. Galperin.

La enseñanza de los procedimientos heurísticos forma parte de la instrucción heurística, ella se define por autores cubanos como: “la enseñanza consciente y planificada de reglas generales y especiales de la heurística para la solución de problemas, para lo cual es necesario que cuando se declaren por primera vez las mismas explícitamente, se destaquen de un modo claro y firme y se recalque su importancia en clases posteriores hasta que los alumnos las aprendan y utilicen independientemente de manera generalizada, por lo que debe ejercitarse su uso en numerosas y variadas tareas.” (Ballester et al., 1992, p. 225).

La instrucción heurística permite, por tanto, modelar las acciones que debe acometer el profesor en su papel dirigente del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática que estimulen acciones de los estudiantes, encaminadas al aprendizaje de los procedimientos heurísticos. De esta manera los estudiantes deben transitar a niveles superiores de independencia y en tal sentido aplicar de manera creadora los procedimientos heurísticos no solo en la resolución de tareas matemáticas, sino ante problemas profesionales o no, que se le presenten a lo largo de su vida.

Los procedimientos heurísticos son muy útiles en el tratamiento de los procesos parciales de las situaciones típicas que se consideran problemas en particular, para la obtención de teoremas por vías reductivas y deductivas, como en las demás, se cuenta con un programa heurístico que direcciona la actividad de los componentes personales del proceso de enseñanza-aprendizaje, los cuales se abordarán más adelante.

Aplicaciones de los procedimientos heurísticos a la búsqueda de teoremas

Los teoremas y las demostraciones en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática es otra de las situaciones típicas donde el empleo de los procedimientos heurísticos cobra especial importancia. La búsqueda de un teorema es un proceso parcial de mucho interés didáctico. Este interés se basa en: las potencialidades que posee para la asimilación por los estudiantes de procedimientos heurísticos de trabajo, su eficacia para motivar la necesidad de una demostración y las posibilidades que ofrece como recurso para recordar el enunciado del teorema. La búsqueda de un teorema se considera como un problema en sentido amplio, por lo que se puede estructurar mediante un programa heurístico.

Programa heurístico para la búsqueda de teoremas

1. Orientación hacia el problema: Para el desarrollo de esta fase debe haberse asegurado el nivel de partida de los estudiantes. En esta fase ocupa un lugar

principal la creación de motivos en los estudiantes. La motivación se basa en encontrar una regularidad desconocida para ellos hasta el momento. Resulta esencial que los estudiantes sean orientados hacia el objetivo de la actividad, lo que debe garantizar que el proceso de búsqueda se realice activa y conscientemente por parte de los estudiantes de manera que se transite hacia la independencia de los estudiantes. Esta fase culmina con el planteamiento del carácter de la regularidad que se pretende encontrar.

2. Trabajo en el problema: Esta fase consiste en encontrar una idea de solución y preparar un plan para su realización. Requiere de la precisión del objetivo de la búsqueda, considerando las condiciones en las que esta se desarrolla (medios que se disponen y tareas que se han resuelto con anterioridad): A esta fase corresponde la reflexión sobre los métodos a emplear. Para la vía reductiva se desatacan como procedimientos:
 - Mediciones experimentales de ángulos y longitudes
 - Comparación de magnitudes
 - Consideraciones de analogía
 - Formación de recíprocos
 - Generalización de casos particulares
 - Inducción incompleta
 - Transformaciones geométricas
3. Solución del problema: Esta fase conduce a la suposición deseada, a través del desarrollo de la idea y del plan de solución, aplicando los métodos elegidos. El resultado de esta fase es el enunciado de una proposición que expresa la regularidad investigada.
4. Evaluación de la solución y de la vía: En esta fase se ejecuta un análisis retrospectivo de los métodos y procedimientos empleados, con la finalidad de valorar críticamente la vía utilizada para la búsqueda del teorema. Eventualmente se realizan en esta fase otros análisis sobre el enunciado de la proposición y el lugar que esta ocupa dentro de la teoría que se estudia. Por otra parte, resulta relevante en esta etapa conocer la integración entre el componente cognitivo y el afectivo-motivacional. Saber qué le resultó más difícil de comprender o ejecutar, cómo se sintió durante el proceso de búsqueda de la proposición, así como como otros elementos que favorezcan la discusión en torno a la integración a estas esferas de la personalidad en su proyección metacognitiva.

En el proceso de enseñanza-aprendizaje de los teoremas matemáticos se pueden emplear dos vías. Estas se denominan en correspondencia con los métodos lógicos empleados en la búsqueda del teorema. Por una parte, la vía deductiva se sustenta en la aplicación de reglas válidas de inferencia lógica. De esta manera, se deduce a partir de proposiciones conocidas un nuevo teorema cuya veracidad está asegurada. En esta vía transcurren simultáneamente la obtención y el aseguramiento del nuevo conocimiento, es decir, que aparecen fundidos los procesos parciales de búsqueda del teorema y su demostración. En cambio, en la vía reductiva la búsqueda del teorema se realiza aplicando analogías, inducción incompleta, mediciones y comparaciones sistemáticas, construcción de recíprocos u otros procedimientos reductivos. Se obtiene entonces una proposición cuya validez no está asegurada (una suposición o conjetura). Esta proposición requiere ser demostrada para asegurar su validez, aunque la realización de la demostración en la clase depende de los objetivos del programa de la asignatura y el nivel educativo donde se desarrolla (Hervis Calderín, 2022).

Para profundizar en estos aspectos se propone el siguiente ejemplo devenido del Cálculo Diferencial e Integral:

Ejemplo: Búsqueda del teorema de la unicidad del límite de una función

Objetivo: Deducir el teorema de la unicidad del límite de una función real de una variable real a partir del empleo del método indirecto (reducción al absurdo) para la profundización en la búsqueda de teoremas y su demostración a través del programa heurístico general.

1. Orientación hacia el problema

Aseguramiento del nivel de partida:

Se deben reactivar el Concepto de función. Distintas caracterizaciones del concepto. Concepto de límite por la definición de sucesiones numéricas.

Motivación y orientación hacia el objetivo:

Hasta ahora, se ha empleado la definición del concepto límite de una función para demostrar que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ (que se obtuvo, aplicando los <PH> inducción y generalización) ¿Será este límite único? ¿Existirá alguna proposición de carácter teórico que nos permitirá adquirir la certidumbre de que cualquiera sea el método que se use para calcular el límite cuando la variable tiende a x_0 (siempre que se trabaje correctamente), el resultado debe ser el mismo? <PH> *Completitud* (Necesidad de encontrar una proposición que contribuya a completar la teoría de los límites de funciones).

2. Trabajo en el problema

Precisión del problema

De lo que se trata es precisamente de encontrar esa proposición y se hará por la vía de la deducción, aplicando el método indirecto, pues el contenido de la proposición al ser existencial así lo sugiere.

P: ¿Cómo se puede establecer una proposición que establezca la unicidad del límite de una función cuando la variable tiende a x_0 ?

A: El límite L de una función real de variable real, cuando la variable x tiende a x_0 , si existe, es único.

Suponer la existencia de dos límites diferentes, es decir:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_2$, tal que $L_1 \neq L_2$ y a través de inferencias, encontrar una contradicción con la teoría o con lo supuesto, para concluir que lo supuesto es falso y llegar a la veracidad de la conclusión esperada.

3. Solución del problema

¿Qué significa que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_2$? <RH> *Sustituir concepto por su definición.*

Quiere decir que si $\{x_n\}$ es una sucesión que converge hacia x_0 , la sucesión $\{f(x_n)\}$ converge hacia L_1 y L_2 simultáneamente, por lo que $\lim_{n \rightarrow \infty} |f(x_n) - L_1| = 0$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} |f(x_n) - L_2| = 0$

¿qué operación matemática será conveniente efectuar para eliminar el término $f(x_n)$?

Restando las dos igualdades anteriores obtenemos:

$$f(x_n) - L_1 - (f(x_n) - L_2) = 0$$

$-L_1 + L_2 = 0$, lo que implica que ambos valores son iguales y se contradice la premisa de demostración

Luego ¿A qué conclusión se puede arribar?

“El límite de una función, si existe, es único”

4. Evaluación de la solución y de la vía

El profesor debe favorecer la reflexión sobre otra manera de encontrar la demostración del teorema utilizando la definición del concepto límite mediante la notación épsilon-delta mediante los $\langle PH \rangle$ *Analogía y Variación de condiciones*. Así como la valoración de la posibilidad de demostrar la proposición convirtiéndola a la forma “si...entonces”. Si f tiene límite L en x_0 entonces este límite es único. Es importante conocer si al estudiante le resultó interesante este método de demostración, así como sintetizar en qué consiste y en qué casos es pertinente aplicarlo. Puede resultar útil invitarlos a pensar en qué teoremas conocidos se puede aplicar este método de demostración.

CONCLUSIONES

Las proposiciones matemáticas que resultan verdaderas a través de una demostración se denominan teoremas. Para la elaboración de teoremas y sus demostraciones se emplean dos vías diferentes: la vía de la deducción y la vía de la recursión. La selección de un método de demostración apropiado (directo o indirecto) se basa en el análisis de la estructura lógica del teorema. En la Didáctica de la Matemática, la búsqueda de un teorema y su demostración es considerada un problema en sentido amplio, es por ello que para su solución se utilizan recursos heurísticos y el programa heurístico general como guía de acción tanto para el profesor como para el estudiante.

REFERENCIAS

- Andrés-Romano, C. (2019). Estudio experimental de reglas heurísticas en secuenciación. <http://hdl.handle.net/10251/120975>.
- Ballester-Pedroso, S., García-la Rosa, J. E., Almeida-Carazo, B., Santana-De Armas, H., Álvarez-Pérez, M., Rodríguez-Ortiz, M., González-Noguera, R. A., Villegas-Jiménez, E., Fonseca-González, A. L., Puig-Reyes, N. I., Arteaga-Valdés, E., Valdivia-Sardiñas, M., & Fernández-Peña, C. L. (2018). *Didáctica de la Matemática* (Vol. Tomo I). La Habana: Editorial Felix Varela.
- Ballester-Pedroso, S., Santana, H., Hernández, S., Cruz, I., Arango, C., García, M., Álvarez, A., Rodríguez, M., Batista, L. C., Villegas, E., Almeida, B., & Torres, P. (1992). *Metodología de la Enseñanza de la Matemática* (Vol. 1). La Habana: Editorial Pueblo y Educación.
- Curbeira-Hernández, D., Bravo-Estévez, M., & Morales-Díaz, Y. (2019). La formación de habilidades profesionales en la educación superior. *Revista Cubana de Medicina Militar*, 48.
- Elías-Chanchí, G., Gómez-Álvarez, M. C., & Yesid-Campo, W. (2020). Criterios de usabilidad para el diseño e implementación de videojuegos. *Revista Ibérica de Sistemas e Tecnologías de Informação*(E26), 461-474.
- Fernández-Doural, R. A., Gil-Fuentes, M. R., & Maceo-Alvarez, Y. (2020). La práctica de la interdisciplinariedad heurística del proceso educativo en la enseñanza de la Matemática (Revisión). *Redel. Revista Granmense de Desarrollo Local*, 4, 1130-1140.
- Fernández-Suárez, B., León-Capote, M., & Otero-Díaz, D. (2019). Alternativa didáctica para la motivación de los estudiantes de la carrera Licenciatura en Educación Matemática. *Conrado*, 15(68), 56-63.
- Hervis Calderín, M. (2022). *Búsqueda de proposiciones en la circunferencia y el círculo* [Tesis en opción al título académico de Máster en Matemática Educativa, Universidad de Matanzas]. Matanzas.
- Jungk, W. (1981). *Conferencias sobre metodología de la enseñanza de la Matemática* (Vol. 2). La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

- Müller, H. (1987). Aspectos metodológicos acerca del trabajo con ejercicios en la enseñanza de la matemática. Folleto mimeografiado. *Instituto Central de Ciencias Pedagógicas. La Habana.*
- Müller, H. (1988). El programa heurístico general para la resolución de ejercicios (III parte). *Boletín Sociedad Cubana de Matemática*, 13-25.
- Naveira-Carreño, W., Valdivia-Sardiñas, M., & Pino-Batista, M. (2021). La dirección del proceso de enseñanza-aprendizaje de los procedimientos de solución de la Matemática. *X Convención Científica Internacional de la Universidad de Matanzas. IV Taller de Ciencias Básicas, Matanzas, Cuba.*
- Naveira Carreño, W. (2022). *La dirección del proceso de enseñanza-aprendizaje de los procedimientos de solución del cálculo diferencial e integral en la carrera Economía.* [Tesis en opción al grado científico de Doctor en Ciencias de la Educación, Universidad de Matanzas]. Matanzas.
- Parra-Aguilera, M., Gamboa-Graus, M. E., López-Toranzo, J., & Borrero-Springer, R. (2017). Procedimientos heurísticos para resolver problemas matemáticos aplicados a resolución de problemas químicos. *Dilemas Contemporáneos: Educación, Política y Valores*, 5(1).
- Polya, G. (1982). *Cómo plantear y resolver problemas.* México D.F.: Editorial Tirillas.
- Zilmer, W. (1981). *Complementos de Metodología de la Enseñanza de la Matemática.* La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

2.

PAPEL DEL ANÁLISIS MATEMÁTICO EN LA DISCIPLINA PRINCIPAL INTEGRADORA EN LA LICENCIATURA EN EDUCACIÓN. MATEMÁTICA

ROLE OF MATHEMATICAL ANALYSIS IN THE MAIN INTEGRATIVE DISCIPLINE IN THE DEGREE IN MATEHEMATICS EDUCATION

M. Sc. Jennifer de la Caridad Pérez Arias

<https://orcid.org/0000-0001-8971-4947>

M. Sc. Raynelis León Paredes

<https://orcid.org/0000-0003-0673-5000>

Universidad de Matanzas

RESUMEN

El perfeccionamiento continuo del sistema de educación constituye una de las tareas principales en que está enfrascado el pueblo cubano. Ante estos retos, se necesita cada día, mayor preparación de los estudiantes de las carreras pedagógicas, por el estudio de los contenidos que contribuyan a fomentar un pensamiento flexible, activo y reflexivo, consecuente con la vida y la especialidad para la cual se están preparando. El trabajo que se presenta aborda la contribución de la Disciplina Principal Integradora-Formación Laboral Investigativa en la formación profesional del profesor de Matemática, considerada como la columna vertebral del proceso formativo. Tiene como objetivo ofrecer sugerencias metodológicas para dar cumplimiento a los objetivos de la Disciplina Principal Integradora –Formación Laboral Investigativa desde el proceso de enseñanza aprendizaje de la disciplina Análisis Matemático. Las sugerencias metodológicas que se proponen parte de