CAPÍTULO 2.
Notación en el Mundo discreto

Después de abordar el puente entre el mundo análogo/continuo con el mundo digital/discreto, nos introduciremos en la notación que se utiliza en procesamiento digital de señales.

Al finalizar el capítulo, deberás estar en capacidad de:

1. Expresar en el dominio Z una señal en tiempo discreto de duración finita.
2. Convertir una ecuación de entrada-salida en una función de transferencia en el dominio Z.
3. Dibujar en diagramas de bloques un sistema FIR.
4. Identificar si un filtro digital es FIR o IIR a partir de la ecuación de entrada-salida, la respuesta al impulso, o la función de transferencia del sistema.

En muchos libros de Procesamiento Digital de señales encontrarás como tema infaltable la Transformada Z (conocida como TZ) con su matemática, y ecuaciones, y de pronto pensarás que es un tema muy difícil de abordar. Pues estás equivocado, la TZ es una representación muy amigable de las señales discretas, la cual nos ayuda a modelar el comportamiento de un sistema discreto a través de su entrada y salida. De una forma muy intuitiva vamos poco a poco a conocer en qué consiste la TZ y cómo nos apoya en la representación y diseño de los filtros digitales para señales 1D.

2.1. REPRESENTACIÓN DE UNA SEÑAL DISCRETA EN TÉRMINOS DE IMPULSOS DESPLAZADOS Y NOTACIÓN Z

Partamos de la señal $x[n]$ de la Figura 14, la cual contiene 10 muestras comprendidas en el rango $[-4 \quad 5]$. Recuerda que en el dominio discreto no hablamos de segundos, sino de muestras, y que solamente existen valores de n enteros.

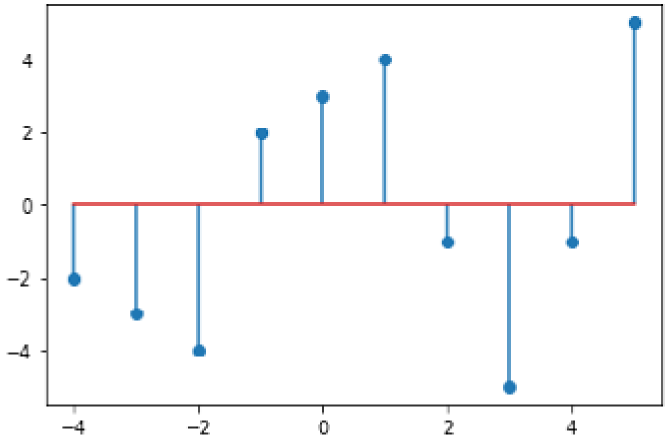

Figura 14. Ejemplo de señal en el dominio discreto.

Esta señal la podemos dibujar en lenguaje Python, con el siguiente código:

```
import numpy as np
import matplotlib
import matplotlib.pyplot as plt
n = np.linspace(-4,5, 10)
print(n)
x = np.array([-2, -3, -4, 2, 3, 4, -1, -5, -1, 5])
print(x)
plt.stem(n,x, use_line_collection="True")
```

Podemos representar esta señal de varias formas, por ejemplo:

$$
\begin{aligned}
x(-4) &= -2\\
x(-3) &= -3\\
x(-2) &= -4\\
x(-1) &= 2\\
x(0) &= 3\\
x(1) &= 4\\
x(2) &=- 1\\
x(3) &=- 5\\
x(4) &=- 1\\
x(5) &= 5
\end{aligned}
$$

En términos de impulsos desplazados, así:

$$x[n] = -2\delta[n+4] - 3\delta[n+3] - 4\delta[n+2] + 2\delta[n+1] + 3\delta[n] + 4\delta[n-1] - \delta[n-2] - 5[n-3] - \delta[n-4] + 5\delta[n-5]$$

Y de forma compacta, así:

$$x[n] = \sum_{k=-4}^{5} a_k \delta[n-k]$$

Con $a_{-4} = -2$, $a_{-3} = -3$, $a_{-2} = -4$, $a_{-1} = 2$, $a_0 = 3$, $a_1 = 4$, $a_2 = -1$, $a_3 = -5$, $a_4 = -1$, $a_5 = 5$.

Supongamos que ahora transformamos la señal al dominio Z, es decir que:

$$x[n] \xrightarrow{TZ} X(z)\ ) \qquad \text{Ecuación 7}$$

Obteniendo para esta señal:

$$X(z)=-2z^4 - 3z^3 - 4z^2 + 2z^1 + 3z^0 + 4z^{-1} - z^{-2} - 5z^{-3} - z^{-4} + 5z^{-5}$$

¿Qué similitudes encuentras entre x[n] con X(z)?

Resuelve esta pregunta antes de leer la respuesta que se encuentra a continuación.

Podemos observar que:

a) Los impulsos que se encuentran ubicados a la izquierda del origen, su TZ corresponde a una potencia positiva de z.
b) Los impulsos que se encuentran ubicados a la derecha del origen, su TZ corresponde a una potencia negativa de z.
c) Las amplitudes y signos de los impulsos se conservan.
d) La TZ del impulso ubicado en el origen corresponde a la amplitud del impulso (dado que $z^0=1$).

De forma intuitiva hemos llegado a la ecuación que relaciona el dominio discreto con el dominio z, así:

$$X(z) \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\, z^{-k} \qquad \text{Ecuación 8}$$

Donde $x(k)$ es la amplitud de la señal para $n=k$, mientras que z es una variable compleja con la cual se transforma del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia. Para señales discretas, podemos decir que si la Transformada de Fourier existe, entonces su resultado coincide con la TZ de la señal haciendo $z=e^{j\omega}$, es decir, para $|z|=1$.

2.2. MODELANDO SISTEMAS DISCRETOS

Un sistema discreto es aquel en el que tanto la señal de entrada, como la de salida, son discretas, es decir, que tienen un número finito de muestras en un rango (de tiempo) seleccionado. Estos sistemas se pueden representar por ecuaciones de entrada-salida, funciones de transferencia y diagramas de bloques.

Supongamos que tenemos un sistema discreto con la siguiente ecuación de entrada-salida:

$$y[n]=\frac{x[n]+x[n-1]+x[n-2]}{3}$$

Entonces, para calcular la salida en el tiempo discreto actual necesitamos conocer la entrada en el mismo tiempo discreto actual, la entrada en el tiempo discreto anterior, y la entrada en dos tiempos discretos anteriores. Posteriormente, se promedian esos tres valores.

Para reescribir la ecuación de entrada-salida en el dominio *Z,* es necesario que conozcamos el efecto de un retardo de la señal en el dominio temporal.

Específicamente,

si $x[n] \xrightarrow{TZ} X(z), \Rightarrow x[n-1] \xrightarrow{TZ} z^{-1}X(z)$ Ecuación 9

Y de forma general,

$$x[n-k] \xrightarrow{TZ} z^{-k}X(z)$$ Ecuación 10

Entonces, $x[n-2] \xrightarrow{TZ} z^{-2}X(z).$

Aplicando el concepto anterior, reescribimos la ecuación de entrada-salida del sistema en el dominio Z, así:

$$Y(z)=\frac{X(z)+z^{-1}X(z)+z^{-2}X(z)}{3}$$

Factorizamos el término X(z), y lo pasamos a dividir al lado izquierdo de la ecuación, obteniendo:

$$\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1+z^{-1}+z^{-2}}{3}$$

El resultado anterior se conoce como la Función de Transferencia del sistema, $H(z)$.

Te preguntarás si existe alguna relación entre $H(z)$ y $h[n]$. La respuesta es que sí. Específicamente, $H(z)$ es la *TZ* de la respuesta al impulso del sistema, es decir,

$$h[n] \xrightarrow{TZ} H(z)\equiv\frac{Y(z)}{X(z)}$$ Ecuación 11

Recuerda que el operador "≡" significa *"por definición es igual a".*

Entonces, un sistema LTI (Lineal e Invariante en el Tiempo) se puede caracterizar tanto por $h[n]$ en el dominio del tiempo discreto, como por $H(z)$ en el dominio de Z.

Finalmente, nos queda la representación del sistema por diagrama de bloques. Para ello, dibujamos nuestra ecuación de entrada-salida, partiendo de *x[n],* incluyendo bloques de retardo (es decir bloques z^{-1}), sumadores, y amplificadores (o atenuadores), para finalmente obtener *y[n]*.

Para el sistema que hemos utilizado en esta sección, su diagrama de bloques es:

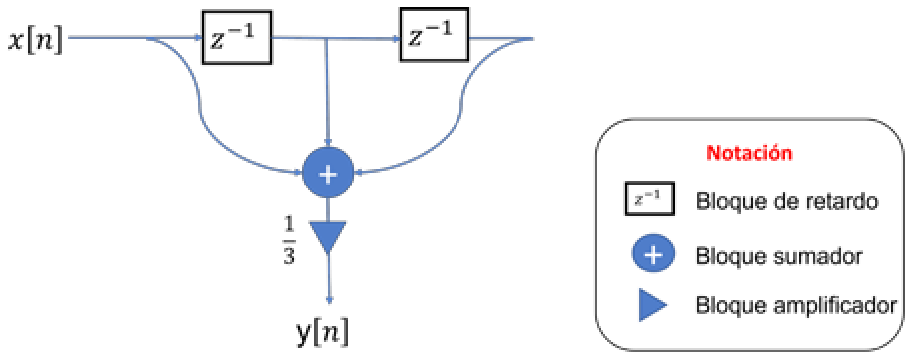

Figura 15. Ejemplo de diagrama de bloques de un sistema discreto.

En este caso, dado que tanto *x[n], x[n-1]*, como *x[n-2],* están ponderados por el mismo escalar, entonces, el bloque de amplificación se ubica después del sumador. En otros casos en los que cada término tenga su propia ponderación, es necesario incluir un bloque de amplificación por término de la ecuación, previo al bloque sumador.

2.3. INTRODUCCIÓN A LOS SISTEMAS DISCRETOS FIR vs IIR

En esta sección nos centraremos en la diferencia que existe entre los filtros FIR y los filtros IIR, de acuerdo con su respuesta al impulso.

Para ello, vamos a utilizar cuatro casos.

Caso 1:

Nuestro sistema discreto tiene la siguiente relación entrada-salida:

$$y[n] = \sum_{k=-2}^{2} a_k x[n-k]$$

Donde a_k es un escalar, y k está comprendida entre [-2 2]. Este sistema contiene cinco términos, los cuales son x[n + 2], x[n + 1], x[n], x[n - 1] y x[n - 2] .

Vamos a reescribir la ecuación en el dominio Z, así:

$$Y(z) = \sum_{k=-2}^{2} a_k z^{-k} X(z)$$

Y ahora pasamos a dividir $X(z)$ a la parte izquierda de la ecuación, obteniendo:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{k=-2}^{2} a_k z^{-k}$$

Expandamos los términos de la función de transferencia, así:

$$H(z) = a_{-2}z^2 + a_{-1}z^1 + a_0 z^0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}$$

¿Qué señal en el dominio del tiempo discreto tiene como transformada Z el valor de $H(z)$ que acabamos de encontrar?

La respuesta es,

$$h[n] = a_{-2}\delta[n+2] + a_{-1}\delta[n+1] + a_0\delta[n] + a_1\delta[n-1] + a_2\delta[n-2]$$

Teniendo en cuenta que la cantidad de impulsos es finita, este sistema es FIR (Finite Impulse Response). Adicionalmente, es simétrico (espejo) respecto al origen y no causal. Por lo cual, la salida depende de la señal de entrada en valores futuros, y no se puede trabajar en tiempo real.

Caso 2:

La relación entrada-salida del sistema, es:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{4} a_k x[n-k]$$

Donde a_k es un escalar, para los valores de k comprendidos entre $[0 \quad 4)]$. Este sistema, al igual que el del Caso 1, contiene cinco términos (pero ahora desde $x[n]$ hasta $x[n-4]$).

En el dominio Z, la ecuación queda expresada de la siguiente forma:

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{4} a_k z^{-k} X(z)$$

Y su función de transferencia, así:

$$H(z) = \sum_{k=0}^{4} a_k z^{-k} = a_0 z^0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3} + a_4 z^{-4}$$

En el dominio del tiempo, la respuesta al impulso es:

$$h[n] = a_0\, \delta[n] + a_1\, \delta[n-1] + a_2\, \delta[n-2] + a_3\, \delta[n-3] + a_4\, \delta[n-4]$$

De forma similar al Caso 1, el sistema es FIR. No obstante, para este ejemplo la respuesta al impulso no está centrada en el origen, sino que inicia en $n=0$. Entonces, es un sistema causal y la salida del sistema se puede calcular en tiempo real.

Caso 3:

En este tercer caso, la relación entrada-salida del sistema, es:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} x[n-k]$$

A diferencia de los ejemplos anteriores, la cantidad de términos a la derecha de la igualdad no es finita. Tenemos x[n], x[n-1], x[n-2], y así sucesivamente hasta x[n-∞].

En el dominio Z, la ecuación queda así:

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} X(z)$$

Y su función de transferencia, es:

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = z^{0} + z^{-1} + z^{-2} + \cdots + z^{-\infty}$$

En el dominio del tiempo, la respuesta al impulso es:

$$h[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \cdots + \delta[n-\infty]$$

Como la cantidad de impulsos en $h[n]$ es infinita, este sistema es IIR (Infinite Impulse Response). Por otro lado, como todos los impulsos se ubican a la derecha del origen (o en el origen), entonces el sistema es causal. Teniendo en cuenta que el diagrama de bloques requeriría de un número infinito de términos de retardo y de multiplicadores (si cada impulso tuviese una amplitud diferente), entonces, es común que se reescriba el sistema, como se expresa en el siguiente caso.

Caso 4:

La relación entrada-salida del sistema se define por la ecuación:

$$y[n] = x[n] + y[n-1]$$

Para obtener la señal de salida, es necesario conocer la señal de entrada en el mismo instante de tiempo discreto, y la señal de salida un instante anterior.

Este sistema es el mismo presentado en el Caso 3, como verificaremos a continuación.

Partiendo de,

$$y[n] = x[n] + x[n-1] + x[n-2] + x[n-3] + \cdots + x[n-\infty]$$

Al retardar en una posición todos los términos de la ecuación anterior, tendremos:

$$y[n-1] = x[n-1] + x[n-2] + x[n-3] + x[n-4] + \cdots + x[n-\infty]$$

Por lo cual, podremos re-escribir $y[n]$ así:

$$y[n] = x[n] + \underbrace{x[n-1] + x[n-2] + x[n-3] + \cdots + x[n-\infty]}_{y[n-1]} = x[n] + y[n-1]$$

Entonces, hemos verificado que nuestro sistema del Caso 4 es el mismo sistema del Caso 3. Por lo tanto, es IIR y causal.

Por otro lado, en el dominio Z obtenemos que:

$$Y(z) = X(z) + z^{-1}\,Y(z)$$

Y reordenando el resultado anterior:

$$Y(z) - z^{-1}\,Y(z) = X(z),$$

$$Y(z)\{1 - z^{-1}\} = X(z)$$

Llegamos a la función de transferencia del sistema:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

De forma general, si en la ecuación de entrada-salida existe algún término a la derecha de la ecuación de la forma $y[n-k]$, para k entero positivo o negativo, entonces el sistema es IIR. También es IIR si se necesita conocer infinitos valores de la señal de entrada, de la forma $x[n-k]$. Por otro lado, en términos de causalidad, si es necesario conocer valores pasados y/o presentes de la entrada y/o salida, entonces el sistema es causal; en caso contrario es no causal. Por lo cual, al unir los conceptos anteriores, tenemos que el sistema $y[n] = 0.9x[n] + 0.1y[n-2]$ es IIR causal, mientras que, el sistema $y[n] = 0.9x[n] + 0.1y[n+2]$ es IIR no causal.

Adicionalmente, en términos de la función de transferencia $H(z)$, si solamente tiene un polinomio en el numerador (dependiente de z) y el número de términos es finito, entonces el filtro es FIR. En caso contrario, el filtro es IIR. Si los polinomios solamente tienen términos de z negativos, el filtro es causal; en caso contrario, es no causal.