

## 9.

# HABILIDADES PREDICTIVAS EN LA COMPRESIÓN DE LOS NÚMEROS RACIONALES

Osmar Erlin Andrade Mosquera<sup>20</sup>

### Resumen

El presente estudio hace parte de una investigación más amplia, en la formación Doctoral en Ciencias de la Educación, en la línea de Educación Matemática, trata sobre el pensamiento numérico y en particular sobre el objeto matemático de los números racionales. El aprendizaje y comprensión del número racional no ha mejorado. A pesar de los numerosos estudios sobre su enseñanza y aprendizaje en el ámbito escolar. El objetivo es lograr una comprensión duradera y consciente de este concepto en estudiantes de educación básica secundaria de una institución educativa oficial en Colombia. Como marco teórico se utilizó los Registros de Representación Semiótica. En el marco metodológico, se optó por la Ingeniería didáctica en sus fases. Porque, es un esquema experimental basado en las realizaciones didácticas en clase. Los resultados permiten concluir que hay dificultades iniciales en la construcción de este concepto. Debido, a que están acostumbrados a trabajar solo en el conjunto de los números naturales y el de los enteros. Además, existen dificultades en la habilidad para cambiar de un registro de representación a otro. Porque, no hay coordinación entre los diferentes registros y

---

<sup>20</sup>Universidad del Quindío, Armenia, Colombia. [oeandradem@uqvirtual.edu.co](mailto:oeandradem@uqvirtual.edu.co); (+57) 3113442896; <https://orcid.org/0009-0003-8170-0956>

Estudiante activo de la Tercera Cohorte del programa de Doctorado en Ciencias de la Educación en la Universidad del Quindío. Se desempeña como docente nombrado en propiedad en la Secretaría de Educación del Valle del Cauca. Tiene formación en Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales; Licenciado en Matemáticas y Normalista Superior.

no logran comprender que dos representaciones distintas pueden representar un mismo objeto matemático.

**Palabras claves:** Número Racional; Comprensión; Aprendizaje; Pensamiento Numérico; Educación Matemática.

## Introducción

El aprendizaje y comprensión del número racional según los numerosos estudios en las últimas tres décadas en el ámbito escolar y las reformas que se han incorporado al sistema indican que aún no se ha mejorado como se espera. Alcanzar el objetivo de lograr una comprensión duradera y consciente de este concepto en estudiantes de educación básica secundaria de una institución educativa oficial en Colombia. Permitirá que los estudiantes alcancen un desarrollo en la comprensión conceptual de este objeto matemático y el éxito académico, profesional y ocupacional, por la presencia de éste en todas y cada una de las áreas del saber y en la vida cotidiana. Se optó por el marco teórico de los Registros de Representación Semiótica. Ya que estos, permiten la movilización de estos registros de representación para la comprensión de este concepto en los estudiantes. Duval (2004) desarrolló el marco semiótico cognitivo para el análisis del funcionamiento cognitivo del pensamiento en investigación en didáctica de las matemáticas. Específicamente en el aprendizaje de las matemáticas y de la lengua natural, en donde se enfoca en los “registros semióticos de representación” y afirma que “una ley fundamental del funcionamiento cognitivo del pensamiento es que: no hay noesis sin semiosis”. Concluye que para el aprendizaje de las matemáticas y de la lengua materna, “es necesario una diversidad de registros de representación semióticas y la coordinación interna entre ellos”, además, que la actividad permita producir y transformar en otras o del mismo tipo las representaciones semióticas.

## Referentes teóricos

### Los números racionales como objeto matemático

Según Duval (2004) un aspecto que se debe tener en cuenta en los estudios en educación matemática sobre los procesos de enseñanza y de aprendizaje es distinguir el objeto matemático de su representación.

D'Amore (2006) citando a D'Amore & Godino (2006) considera que “los objetos matemáticos deben ser considerados como símbolos de unidades culturales, emergentes de un sistema de usos ligados a las actividades de resolución de problemas que realizan ciertos grupos de personas y que van evolucionando con el tiempo” (p.180). Desde este se considera que el significado del objeto matemático no depende solamente de la definición matemática, sino que está ligado a la resolución de problemas. Además, se tiene en cuenta que los objetos matemáticos emergen a través de ciertos tipos de prácticas en el interior de ciertas instituciones. Es lo que Godino & Batanero (1994) apoyados en Chevallard (1991) en la que este define que un objeto matemático es

emergente de un sistema de prácticas donde son manipulados objetos materiales que se desglosan en diferentes registros semióticos: registro de lo oral, palabras o expresiones pronunciadas; registro de lo gestual; dominio de la inscripción, lo que se escribe o dibuja (grafismo, formulismos, cálculos, etc), es decir, registro de lo escrito. (p.8)

En ese sentido, ellos definieron que los objetos matemáticos emergen a partir de un sistema de prácticas. Que pueden ser institucional o personal. En el primero emergen conocimientos objetivos (objeto institucional) y en el segundo emergen conocimientos subjetivos (objeto personal). D'Amore (2006) En el mismo sentido, presenta como a modo de sugerencia los diferentes tipos de objetos matemáticos que están presentes en las prácticas matemáticas:

- “lenguaje” (términos, expresiones, notaciones, gráficos, ...) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, ...)
- “situaciones” (problemas, aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios, ...)
- “acciones” (operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo, procedimientos, ...)
- “conceptos” (introducidos mediante definiciones o descripciones) (recta, punto, número, media, función, ...)
- “propiedad o atributo de los objetos” (enunciados sobre conceptos, ...)
- “argumentos” (por ejemplo, los que se usan para validar o explicar los enunciados, por deducción o de otro tipo, ...). (p.181)

Pecharromán (2013) considera que los objetos matemáticos representan una funcionalidad a partir del contexto. Y que esta funcionalidad a su vez está determinando la representación y el significado del objeto. Por esta razón,

el objeto es o representa una función o funcionalidad que organiza o interpreta el contexto. La función de organizar o interpretar el contexto que representa el objeto justifica su razón de existencia. Es decir, se considera la naturaleza de los objetos matemáticos en relación con su origen, con la causa de su origen.

Por tanto, los objetos matemáticos tienen existencia real pero no material. Su descubrimiento no

es una experiencia exclusivamente física o sensitiva, sino que es necesario que intervenga la razón. Los objetos matemáticos son producto de la razón porque son percibidos por ella, y esta percepción hace que se les pueda considerar objetos reales. (p.123)

## **Aprendizaje y comprensión en los números racionales**

El aprendizaje de la matemática es uno de los más complejo de todas las ciencias. Debido a la diversidad de elementos que intervienen en él. Fandiño Pinilla (2010:15) considera que

Un aprendizaje concluso con éxito en matemática es de considerarse una óptima combinación de aprendizaje específicos y diferentes. En matemática, De hecho, no basta haber *construido* un concepto, sino que es necesario saberlo *usar* para efectuar cálculos o dar respuestas a ejercicios; combinarlo con otros o con estrategias oportunas para *resolver* problemas; es necesario saber *explicar* a sí mismo y a los otros el concepto construido o la estrategia seguida; se requiere un uso sapiente de las transformaciones semióticas que permiten *pasar* de una representación a otra.

Sin embargo, Giorgio Bolondi en el prólogo de Fandiño Pinilla (2010:9) piensa que el aprendizaje en los estudiantes está condicionado por lo que será evaluado. En ese sentido, cree que

el aprendizaje, en matemática, ese resultado de procesos complejos, de múltiples aspectos, que requieren un trabajo articulado en el cual se entrelazan las interacciones con el docente y con los compañeros; momento de reflexión y de

relaboración completamente personal, construcciones metódicas y saltos en lo desconocido, memoria y fantasía...

D'Amore (2008:4) considera que el aprendizaje de las matemáticas se da a través de unas prácticas didácticas en acción y producidas intencionalmente. En ese sentido,

el aprendizaje se considera aquí como un conjunto de cambios de comportamientos (por tanto de prestaciones) que señalan, a un observador predeterminado, según sujeto en juego, que este primer sujeto dispone de un conocimiento (o de una competencia)<sup>3</sup> o de un conjunto de conocimientos (o de competencias), lo que implica la gestión de diversos registros de representación, la creación de convicciones específicas, el uso de diversos lenguajes, el dominio de un conjunto de referencias idóneas, de pruebas, de justificaciones y de obligaciones.

Los problemas en los procesos de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes, particularmente en matemática, son diferentes, debido a la diversidad de campos conceptuales que intervienen. En ese sentido, Fandiño Pinilla (2010:11) propone una serie de cuestiones para reflexionar sobre el éxito de los estudiantes en el aprendizaje en matemática. En vez de decir *no alcanzó los logros propuestos* ella propone que fuese mejor pensar

¿En qué no alcanzó el resultado esperado? ¿No entendió los conceptos? ¿Los entiende pero no sabe usarlos para resolver un problema? ¿No sabe efectuar los cálculos? o ¿Sabe efectuarlos pero no sabe la finalidad de estos? ¿Construyó el concepto pero no sabe comunicarlo? ¿Resuelve un problema pero no puede explicar el proceso que siguió para su resolución? ¿No sabe gestionar los cambios de representación semiótica que la matemática exige?

A partir de estas cuestiones, Fandiño Pinilla (2010:17) plantea que el aprendizaje de la matemática se compone de cinco tipologías diferentes que se entrelazan para llegar a cubrir en un alto porcentaje su complejidad. Estas diferentes tipologías de aprendizajes se analizan en cada uno de estos componentes disciplinares; *números, figuras, medidas, datos y pensamiento racional*. Los aprendizajes específicos de la matemática que proponen son:

- “aprendizaje conceptual (noética);
- aprendizaje algorítmico (calcular, operar, efectuar, solucionar,...);
- aprendizaje de estrategias (resolver, conjeturar, deducir, inducir,...);

- aprendizaje comunicativo (definir, argumentar, demostrar, validar, enunciar,...);
- aprendizaje y gestión de las representaciones semióticas (tratar, convertir, traducir, representar, interpretar,...)”.

El estudiante al desarrollar cada uno de estos diferentes tipos de aprendizajes, debe de estar en la capacidad de *saber* y *saber hacer* con cada uno de estos constructos una situación dada. Por saber se entiende, cuando los componentes disciplinares de un objeto matemático se construye a partir de las cinco tipologías de aprendizajes.

Rico (2019) citando a Rico (2016) afirma que la “referencia, representación y sentido son los tres organizadores o categorías semánticas que empleamos para el estudio e interpretación de significado de los contenidos matemáticos escolares” (154). Además, “comprender un contenido matemático en profundidad implica interpretar sus conceptos y ejecutar sus procedimientos con significado coherente” (154). Esto quiere decir, que “entender un concepto matemático es conocer su definición, representarlo, mostrar sus operaciones, relaciones y propiedades y sus modos de uso, interpretación y aplicación a la resolución de problemas” (154).

El aprendizaje del concepto de número racional presenta muchas dificultades. Pero, se puede llegar a comprender si se tienen en cuenta el desarrollo de las diferentes subconstrucciones y su interrelación entre sí, como: parte-todo, relación, operador, cociente y medida, que presenta las fracciones. Además, utilizar las fracciones de la forma más natural posible, a través de usar el lenguaje cotidiano, los modelos concretos, discutir lo que quiere decir dividir una unidad- todo en partes iguales, sobre todo en las formas reales en las que aparecen las fracciones permite la comprensión del número racional. En ese mismo sentido, las ayudas manipulativas promueven los conceptos y las habilidades en el aprendizaje matemático. A través, de las diferentes representaciones del objeto, las situaciones reales, los símbolos hablados y escritos, las imágenes y los modelos concretos. El aprendizaje se maximiza significativamente cuando se interactúa con diversas situaciones reales o modelos concretos que median entre el mundo real y el mundo matemático. Asimismo, se debe permitir interactuar con las diferentes formas de representación y que estas se puedan pasar de una representación a otra. Asimismo, la conceptualización del número racional debe permitir superar la separación entre número y

la magnitud; al mismo tiempo, reconocer y distinguir con qué variable de unidad (simples y compuestas) y de magnitud (continuas y discretas) se está trabajando en los procesos de enseñanza y de aprendizajes.

### **Habilidades predictivas en la comprensión de los números racionales**

En el estudio que realizaron Nicolaou & Pitta-pantazi (2016) titulada “niveles jerárquicos de habilidades que constituyen la comprensión de fracciones en la escuela primaria” se pueden evidenciar las habilidades predictivas que se deben desarrollar en los estudiantes para alcanzar la comprensión en los números racionales.

Los investigadores enfatizan que los motivos que llevaron a considerar las 7 habilidades como niveles jerárquicos en la comprensión de las fracciones se debe a su importancia en los procesos de enseñanza y aprendizaje que permitan superar la complejidad del concepto para los estudiantes, además por los escasos estudios respecto a los niveles de comprensión de las fracciones.

El marco teórico del estudio se centró en determinar la comprensión de las fracciones para la escuela primaria, a partir, de los procesos matemáticos que propone “los planes de estudios nacionales, como el Consejo Nacional de Maestros de Matemáticas NCTM (2000) y Plan Nacional de Matemáticas de Chipre CNMC (2010)” (p.759). La descripción y dimensiones de las siete habilidades que se definieron para la comprensión de fracciones se referenciaron a partir de los procesos del NCTM (2000), dice que

para comprender conceptos matemáticos, los estudiantes deberían ser capaces de (a) resolver problemas matemáticos y reflexionar, (b) usar varios tipos de razonamiento y métodos de prueba, (c) comunicarse utilizando lenguaje matemático, (d) relacionar las ideas matemáticas y los conceptos matemáticos, y (e) usar representaciones para expresar ideas matemáticas y traducir de un tipo de representación al otro. (p.763)

Entonces, las siete habilidades quedaron definidas según el estudio de (Nicolaou y Pitta-Pantazi, 2011a) como: “reconocimiento de fracciones, definiciones y explicaciones matemáticas para fracciones, argumentaciones y justificaciones sobre fracciones, magnitud relativa de fracciones, representaciones de fracciones, conexiones de fracciones con

decimales, porcentajes y división, y reflexión durante la solución de problemas de fracciones” (p.758). Sumado a esto, definen y se describen las dimensiones de base para la comprensión de las fracciones a partir de la NCTM (2000).

En la figura 8 se puede ver el modelo propuesto para la comprensión de las fracciones a través de las siete habilidades.

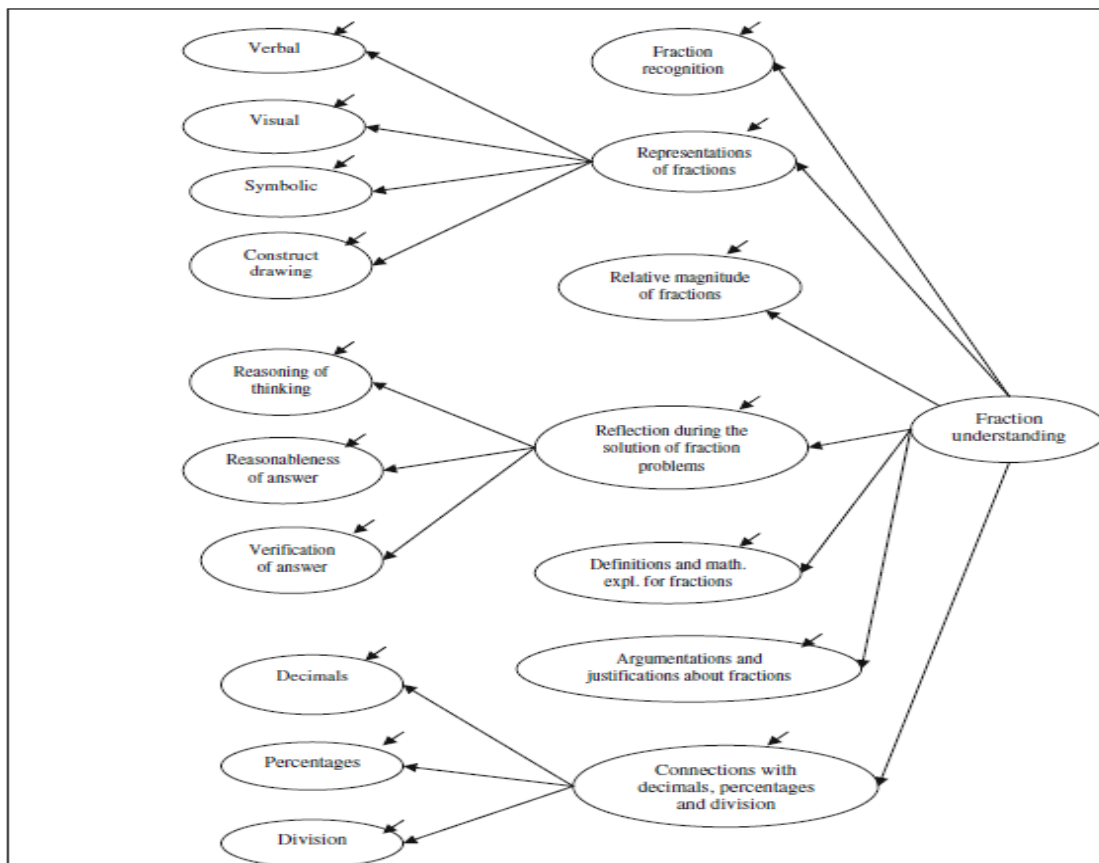


Figura 1. El modelo propuesto para la comprensión de las fracciones (Nicolaou & Pittapantazi, 2016)

En los resultados y en las conclusiones del estudio se descubrió que los niveles jerárquicos que permiten la comprensión de las fracciones quedaron determinados por las siete habilidades. En ese sentido, se descubrieron tres niveles jerárquicos específicos (bajo,

medio y alto), de acuerdo con la estabilidad de las tres mediciones que se realizaron, estos niveles se muestran en la tabla 4.

Tabla 1.  
*Niveles jerárquicos de comprensión de fracciones en las tres mediciones (Nicolaou & Pitta-pantazi, 2016)*

<b>Bajo (L)</b>	<b>Medio (M)</b>	<b>Alto (H)</b>
Reconocimiento de fracciones	Reconocimiento de fracciones	Reconocimiento de fracciones
Magnitud relativa de las fracciones.	Magnitud relativa de las fracciones.	Magnitud relativa de las fracciones.
	Conexiones con decimales, porcentajes y división.	Conexiones con decimales, porcentajes y división.
	Representaciones de fracciones.	Representaciones de fracciones.
		Argumentaciones y justificaciones sobre fracciones.
		Reflexión durante la solución de problemas de fracciones.
		Definiciones y explicaciones matemáticas para fracciones.

### **Aspectos metodológicos**

En cuanto, al aspecto metodológico, se optó por una metodología de investigación que fuera propia del campo de la didáctica de las matemáticas; por tanto, se escogió la Ingeniería didáctica en sus fases. Porque, “se caracteriza, en primer lugar, por un esquema experimental basado en las realizaciones didácticas en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza” (Artigue, Douady, Moreno, y Gómez, 1995).

Hasta el momento el estudio en desarrollo se ha logrado aplicar un instrumento cuestionario abierto como prueba diagnóstica y la recolección de la información se tiene con base en este instrumento. La prueba permitió observar el estado de comprensión que presentan los estudiantes de los números racionales. Los estudiantes que participaron en el estudio fueron 21 del grado 7° de Educación Básica Secundaria de la sede Central, anexa a la Institución Educativa El Queremal, que pertenece al sector oficial, del municipio del Dagua-Valle del Cauca. Los estudiantes son de ambos sexos, que tienen un rango de edad que oscila entre los 12 y los 15 años. Los niveles socioeconómicos están entre el estrato 1 hasta el estrato 3.

El instrumento cuestionario abierto constaba de 9 ítems. En el primero se presentó registros figurales con áreas continuas iguales y desiguales, con el propósito que se hiciera la conversión a un registro simbólico en notación estándar. En el segundo, se esperaba que dibujaran o colorearan según el registro fraccionario escrito, teniendo en cuenta los registros figurales completos o incompletos. En el tercero, el propósito era realizar la conversión a un registro en notación decimal según el registro fraccionario dado. En el cuarto, se presentó dos registros en la recta numérica, se esperaba que escribieran un registro fraccionario para cada recta numérica. En el quinto, se les presentó dos registros, uno en lengua materna y el otro como representación numérica fraccionaria, con propósito de que dibujaran la recta numérica y ubicaran las fracciones descritas en ellas. En el sexto, se les presenta un registro figural con un conjunto discreto de corazones, varios pintados de algunos colores (rojos, azules y amarillos) y se les pidió hallar la fracción que indica cada color dentro del conjunto discreto. En el séptimo, se pretendía que escribieran el porcentaje y la fracción que se indica en el registro verbal escrito. En el octavo se les presentó dos problemas de distribución equitativa en un registro verbal escrito y se esperaba la respuesta en un registro fraccionario y figural. En el último se les presenta un registro figural con áreas contiguas desiguales y se esperaba la conversión en un registro fraccionario.

## **Resultados**

En los resultados de la aplicación del instrumento cuestionario abierto se relacionó con la tabla de los niveles jerárquicos de comprensión de fracciones presentadas anteriormente. En estos se puede evidenciar que los estudiantes que se ubicaron en el nivel bajo lograron desarrollar con éxito las habilidades de reconocimiento de fracciones y la magnitud relativa de las fracciones con un 74,6%. El segundo nivel es un poco más exigente que el anterior y requiere de una comprensión conceptual más elaborada. Para identificar los diferentes sistemas de representación como las fracciones, los decimales y los porcentajes. Además, de tener la habilidad de realizar las conversiones de un sistema de representación a otro. Se obtuvo un desempeño del 14,5%. El tercer nivel incluía todas las habilidades del segundo nivel, por lo tanto, el desempeño que se obtuvo fue del 7.5%. Se evidenció en el estudio que las dificultades más notables fueron en la comprensión de las fracciones en las últimas tres habilidades del tercer nivel. Entonces, se hace necesario que les permita a los estudiantes la posibilidad de alcanzar esta comprensión del nivel más alto de las fracciones.

## **Conclusiones**

Los resultados permiten concluir que los estudiantes presentan mayores desempeños y habilidades al escribir la fracción estándar de un registro figural con áreas continuas y cuando deben dibujar o colorear un registro figural según la fracción indicada. Pero, hay dificultades iniciales en la construcción de este concepto en particular cuando las áreas son desiguales o deben escribir el decimal que resulta de una fracción. También, cuando tienen que dibujar una recta numérica o escribir su fracción. Además, hallar el porcentaje o la fracción de un conjunto discreto y por último resolver problemas que impliquen repartos equitativos. Esto se

puede deber, a que vienen trabajando o están acostumbrados a trabajar solo en el conjunto de los números naturales y el de los enteros. En ese sentido, existen dificultades desde la parte de la instrucción y el nivel de motivación que los estudiantes tengan por las matemáticas en el aula de clase. Estos conocimientos en los que los estudiantes demuestran mejores desempeños y habilidades son precisamente, los que más se están promoviendo desde los procesos de enseñanza y aprendizaje y los otro que no, es porque se les hace poco énfasis en ellos. Los resultados avizoran que el diseño de una arquitectura didáctica garantiza mayor solidez en el aprendizaje de este concepto matemático, porque el estudiante está sujeto a variadas y abundantes consignas que tienen establecido la posibilidad de vincular diferentes sistemas de representación (numéricas, tabulares, gráficas, icónicas, algebraicas, analíticas, lenguaje natural, lengua de señas, entre otras), las cuales declaran la incidencia que tienen en las demandas lógicas que los estudiantes hacen durante los procesos de enseñanza y de aprendizaje; procesos dinámicos que están mediados por las practicas matemáticas, secuencias didácticas y las transposición didáctica a otros contextos de uso del concepto de número racional.

## Referencias bibliográficas

- Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., y Gómez, P. (1995). Ingeniería Didáctica en Educación Matemática: un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. (pp. 97–140. Grupo Editorial Iberoamérica.
- D'Amore, B. (2006). *Didáctica de la Matemática*. Bogotá, Colombia. Cooperativa Editorial Magisterio. Traducción de Ángel Balderas Puga. Revisión de Martha Isabel Fandiño Pinilla.
- D'Amore, B. (2008). Epistemología, didáctica de la matemática y prácticas de enseñanza. Enseñanza de la matemática. Revista de la ASOVEMAT (Asociación Venezolana de Educación Matemática). Vol. 17, n° 1, 87-106. Recuperado de: <file:///C:/Users/elprofe.com/Documents/TRABAJO%20CHILE-2019-MARZO/CAPITULO%202->

MARCO%20TE%3%93RICO/DID%3%81CTICA%20MATEM%3%81TICAS/YA  
%20LE%3%8DDOS/Epistemologia\_didactica\_de\_la\_matematica.pdf

Duval, R. (2004). *Sémiosis et pensée humaine. registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. PeterLang S.A. *Semiosis y Pensamiento Humano, Registros Semióticos y aprendizajes intelectuales*. (Segunda ed.). (1. Myriam Vega Restrepo, Trad.). Universidad de Valle, I. E. P., Grupo de Educación Matemática. Santiago de Cali, Colombia: Merlin I.D.

Fandiño Pinilla, M. I. (2010). *Múltiples aspectos del aprendizaje de la matemática. Evaluar e intervenir en forma mirada y específica*. Prólogo de Giorgio Bolondi. Bogotá, Colombia. Magisterio

Nicolaou, A. A., & Pitta-pantazi, D. (2016). Hierarchical Levels of Abilities that Constitute Fraction Understanding at Elementary School. 757–776.  
<https://doi.org/10.1007/s10763-014-9603-4>

Pecharromás, C. (2013). Naturaleza de los objetos matemáticos: representación y significado. *ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS*, 31(1), 121–134.

Rico, L. (2019). Significar y comprender los sistemas numéricos. *Números, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 100, 153-158