1.6

ALTERNATIVA METODOLÓGICA PARA LA INSERCIÓN DE LAS TECNOLOGÍAS DE LA CIENCIAS Y LA INFORMÁTICA EN LA ASIGNATURA MATEMÁTICA NUMÉRICA

METHODOLOGICAL ALTERNATIVE FOR THE INSERTION OF SCIENCE AND COMPUTING TECHNOLOGIES IN THE NUMERICAL MATHEMATICAL SUBJECT

Autores: M.Sc. Sergio Antonio Fernández Morín, Profesor Asistente

M.Sc. María Teresa Gil Chávez, Profesora Auxiliar

Lic. Dainelis Ulloa Rodríguez, Profesora instructora

Departamento de Ciencias Naturales y Exactas

Facultad de Ciencias Pedagógicas

Universidad Agraria de La Habana "Fructuoso Rodríguez Pérez"

Correos electrónicos: sergiofm@unah.edu.cu, mariat@unah.edu.cu, dainelis473@gmail.com

Cuba

Resumen

La educación en Cuba está en constante transformación y renovación, en este contexto la formación de profesionales universitarios constituye un sistema de formación continua desde el pregrado hasta su desarrollo profesional. Entre las disciplinas que forman parte de los planes del proceso docente de las carreras de ingeniería y de algunas pedagógicas está la Matemática. En consecuencia la enseñanza de la Matemática se encuentra también en un proceso de renovación de sus enfoques, que incluye el empleo de las nuevas tecnologías, como la Informática, que permitan al estudiante adquirir una concepción científica del mundo, un pensamiento matemático y una cultura integral para resolver los problemas científicos, económicos, sociales y tecnológicos relacionados con su especialidad. La Matemática Numérica, como asignatura, es considerada como una ampliación del Análisis Matemático, mediante la cual se dan solución a ejercicios y problemas de forma aproximada, que por métodos analíticos más exactos no se podrían resolver. Los contenidos básicos de esta asignatura son indispensables para lograr un sólido aprendizaje y de gran aplicación tanto en el desarrollo de la profesión como en la vida cotidiana. Este trabajo se centra en el aprendizaje de la Matemática Numérica y en ejemplificar el empleo de programas informáticos que facilitan la comprensión de los métodos numéricos afines a la Matemática Numérica, en el mismo se valoran sus principales regularidades derivadas de la aplicación de los procedimientos didácticos y tecnológicos y se proponen alternativas metodológicas para el perfeccionamiento de dicho proceso.

Palabras clave: Matemática numérica, métodos numéricos, aprendizaje, recursos informáticos

Abstract

Education in Cuba is in constant transformation and renewal, in this context the training of university professionals constitutes a system of continuous training from undergraduate to professional development. Among the disciplines that are part of the teaching process plans for engineering and some pedagogical careers is Mathematics. Consequently, the teaching of Mathematics is also in a process of renewal of its approaches, which includes the use of new technologies, such as Computer Science, that allow the student to acquire a scientific conception of the world, mathematical thinking and an integral culture. to solve scientific, economic, social and technological problems related to their specialty. Numerical Mathematics, as a subject, is considered as an extension of Mathematical Analysis, through which approximate solutions are given to exercises and problems that could not be solved by more exact analytical methods. The basic contents of this subject are essential to achieve solid learning and great application both in the development of the profession and in daily life. This work focuses on the learning of Numerical Mathematics and on exemplifying the use of computer programs that facilitate the understanding of numerical methods related to Numerical Mathematics, in which its main regularities derived from the application of didactic procedures and technological and methodological alternatives are proposed for the improvement of said process.

Keywords: Numerical mathematics, numerical methods, learning, computer resources

Introducción

El perfeccionamiento del Sistema Nacional de Educación ubica en el centro del proceso de enseñanza – aprendizaje al estudiante, asignándole un papel activo en la apropiación de sus conocimientos incluyendo posteriormente el consiguiente desarrollo de habilidades evitando el mecanicismo en el aprendizaje.

La Matemática, como parte del saber científico, desempeña un importante papel en los cambios que tienen lugar en la ciencia actual, lo cual se evidencia en la utilización cada vez mayor de sus métodos por casi todas las ciencias, como expresión del proceso creciente de penetración de sus productos en las diferentes ramas del conocimiento humano.

Las transformaciones en la Educación Superior cubana, se basan en una concepción transformadora y desarrolladora de los procesos pedagógicos educacionales, que incluya además la introducción de las tecnologías de la Informática.

Las carreras de ciencias técnicas, ingenierías y las pedagógicas (Física y Matemática) son ejemplo de lo anterior, por lo que se necesita de ingenieros y profesores con una sólida formación matemática, acorde con las necesidades que impone el desarrollo económico. Atendiendo a estos avances y a la necesidad de lograr una eficiente formación de los actuales y futuros profesionales la Educación Superior se ha enfrascado en el perfeccionamiento y optimización de ese proceso.

En este proceso de cambio y perfeccionamiento de los programas de estudio se ofrecen múltiples posibilidades para contribuir al desarrollo de la personalidad. En este contexto tiene lugar el proceso de enseñanza aprendizaje (PEA) y entre las disciplinas con dificultades para desarrollar este proceso está la Matemática con sus diferentes disciplinas y asignaturas afines (Álgebra, Análisis Matemático, Geometría, Matemática Numérica, entre otras), principalmente en las carreras de ciencias técnicas, (ingenierías), y en las carreras pedagógicas de Matemática, Física e Informática. Así pues con este trabajo se pretende hacer un acercamiento a las regularidades que se presentan en el PEA de la Matemática, así como algunas variantes para insertar los recursos informáticos en la asignatura Matemática Numérica.

Hasta el momento se han logrado avances significativos en la formación de los estudiantes, no obstante, continúan presentando dificultades en el aprendizaje de la Matemática, lo cual está motivado por la limitada integración de los contenidos de estas asignaturas y al poco aprovechamiento de las potencialidades de los recursos informáticos, entre otros aspectos.

Las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) entendidas éstas como un conjunto de avances tecnológicos que nos proporcionan la informática, las telecomunicaciones y las tecnologías audiovisuales, comprenden los desarrollos relacionados con los ordenadores, Internet, la telefonía, las aplicaciones multimedia y la realidad virtual.

El empleo de las TIC en el PEA de la Matemática se divide, principalmente en dos vertientes: el desarrollo de software específicos en sus diferentes denominaciones *(Computer Assisted Instrucción, Computer Assisted Learning)* y el de herramientas computacionales *(Derive, Mathematic, Maple, Geogebra, etc).*

Lo planteado anteriormente comprende los llamados recursos informáticos. Por recursos informáticos se entiende según Escalona M, 2007: “ *el conjunto de software que permiten procesar, manipular, almacenar, transmitir, visualizar e interactuar con diferentes informaciones relacionadas con contenidos de las asignaturas de una o diferentes áreas del conocimiento; así como el hardware que los soporta”*

Entre los programas y herramientas de las TIC que se utilizan en el PEA de la Matemática están el Derive, los graficadores Graphmatica, Geogebra, entre otros.

Desarrollo

La Matemática superior está compuesta por diferentes ramas, cada una se dedica a diferentes objetos matemáticos, como por ejemplo el Análisis matemático estudia las funciones, sus propiedades, etc, el Álgebra estudia los sistemas de ecuaciones, las matrices, los espacios vectoriales y las estructuras algebraicas, etc. Existen otras ramas de la matemática superior como son la Estadística, la Geometría y la Matemática Numérica.

La asignatura Matemática Numérica surge al final de la disciplina Análisis Matemático en virtud de la importancia de los métodos numéricos para la solución aproximada de ejercicios y problemas que permitan además ampliar la visión del docente acerca de la naturaleza de la Matemática y los recursos que ella dispone. Se imparte en el cuarto año de la carrera Licenciatura en Matemática en ambas modalidades de estudio, curso diurno y curso por encuentros.

Mediante esta asignatura se aproximan los valores de las funciones, se derivan e integran estas, así como se resuelven ecuaciones y problemas que no tienen solución exacta y a los cuales se les pueden aplicar métodos numéricos aproximados.

La asignatura Matemática Numérica tiene un enfoque metodológico didáctico único para el tratamiento de cada tipo de problema a resolver por vía numérica. Asimismo su enfoque filosófico está encaminado a fundamentar los métodos aproximados en un mismo cuerpo teórico, a valorar el papel de los métodos numéricos en la formación general de la Matemática como ciencia y su papel en la construcción de otras ciencias. Contribuye además a corroborar el carácter relativo de la verdad objetiva.

La Matemática Numérica tiene como propósito el desarrollo de los métodos para la solución de problemas matemáticos mediante una cantidad finita de operaciones numéricas. O sea, tiene como intención llegar a resultados tan exactos como sea necesario.

Los métodos que emplea la Matemática Numérica reciben el nombre genérico de **métodos numéricos aproximados** y en contraposición a los otros métodos matemáticos se les llama métodos analíticos.

Los métodos numéricos se emplean para resolver ecuaciones, aproximar funciones, optimizar funciones, calcular derivadas e integrales, resolver ecuaciones diferenciales, etc.

Para mostrar el rol de los métodos numéricos dentro de la Matemática se debe discutir la unidad dialéctica que existe entre la matemática exacta y la numérica complementándose a partir del objeto de cada una y negándose por hecho de que la primera a diferencia de la segunda no comparta explícitamente el carácter aproximado del conocimiento modelado.

La matemática numérica propone algoritmos aproximados de cálculo para todos aquellos casos en que la existencia de la solución esté garantizada desde el punto de vista teórico, se conozca o no un algoritmo exacto para resolverlo.

En consecuencia, se propone que el tratamiento didáctico de los contenidos (resolución de ecuaciones, aproximación de funciones, derivación, integración y resolución de ecuaciones diferenciales) parta del planteamiento de un problema en términos generales, lo que permite relacionar los métodos numéricos con contenidos de otras disciplinas matemáticas que le sirven de fundamento (por ejemplo: el teorema de Bolzano constituye el fundamento del método de bisección para resolver ecuaciones o el teorema del punto fijo de Banach como fundamento teórico de los métodos de iteración), acompañado a esto con una representación gráfica de la función asociada a la ecuación mediante asistentes matemáticos Derive, Geogebra o Graphmática, entre otros, analizando invariablemente que la solución del problema esté garantizada desde el punto de vista teórico.

En el tratamiento del contenido se mostrará explícitamente cómo los conocimientos que conforman el cuerpo teórico de la matemática numérica corroboran el carácter relativo de la verdad objetiva. Para ello se tendrá en cuenta que los métodos numéricos, al sustituir el problema real por otro aproximado, revelan explícitamente la diferencia entre los conocimientos científicos y la realidad que representan.

Los recursos informáticos a utilizar no son los que marcan la diferencia sino las actividades planificadas por el profesor en su interrelación y que serán desarrollados por los estudiantes. Para ello se necesita considerar tres aspectos importantes: la mediación pedagógica de esos recursos, la motivación para su utilización y el papel que desempeñan en la didáctica.

La realización de los cálculos, para las tareas docentes de carácter cuantitativo se efectuará preferiblemente en Excel o se podrán emplear cualquier medio electrónico: calculadoras, teléfonos móviles, etc, aunque puede también usarse DERIVE según el diagnóstico y el programa de la asignatura. Para ello debe orientarse una planificación de la solución informática previa a su implementación en la computadora, procurando siempre que sea posible que el algoritmo sea elaborado e implementado en la computadora por el estudiante o emplear los programas ya elaborados.

A continuación se plantea un ejemplo de la resolución de un ejercicio de la Matemática Numérica y el empleo de los programas informáticos.

1) Determinar la raíz de la ecuación: $x^3 - x^2 + 4x - 3 = 0$ en el intervalo $I[0;4]$ con tres cifras decimales exactas empleando el método de bisección.

Respuesta:

Las hipótesis del método de bisección son:

- Sea la ecuación $f(x) = 0$ y un intervalo $[a;b]$ tales que:

1) En el intervalo $[a;b]$ la ecuación tiene una sola raíz.

2) $f(x)$ es continua en $[a;b]$.

3) $f(x)$ posee signos diferentes en "a" y en "b", es decir: $f(a).f(b) < 0$.

El método consiste en aproximar sucesivamente la raíz de la ecuación con el punto medio del intervalo $[a;b]$.

Problema a resolver:

Hallar las raíces de la ecuación $f(x) = 0$ que se encuentran en un intervalo I.

Etapas:

I. **Separación de raíces:** Hallar intervalos de forma que en cada uno de ellos exista solo una raíz.

II. **Calcular las raíces:** Hallar las raíces deseadas con una exactitud requerida.

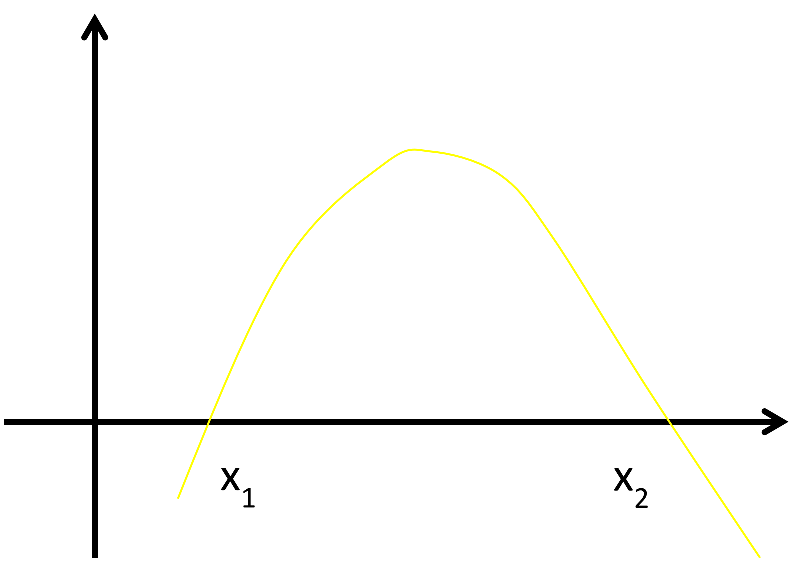
Par la separación de raíces se utilizan a su vez varios métodos, como son: el método gráfico y el analítico.

El método gráfico consiste en representar gráficamente la función $y = f(x)$ y por tanto los ceros de $f(x)$ serán las raíces de la ecuación $f(x) = 0$. Y por observación aproximadamente se determinan los intervalos en que quedarán aisladas las raíces. En los inicios de la asignatura estos gráficos se trazaban mediante procedimientos manuales lo que hacía más engorroso el proceso y requería gran cantidad de tiempo.

El método analítico consiste en el uso de determinados resultados teóricos que nos permiten asegurar la existencia de raíces en determinados intervalos.

Método gráfico de separación de raíces

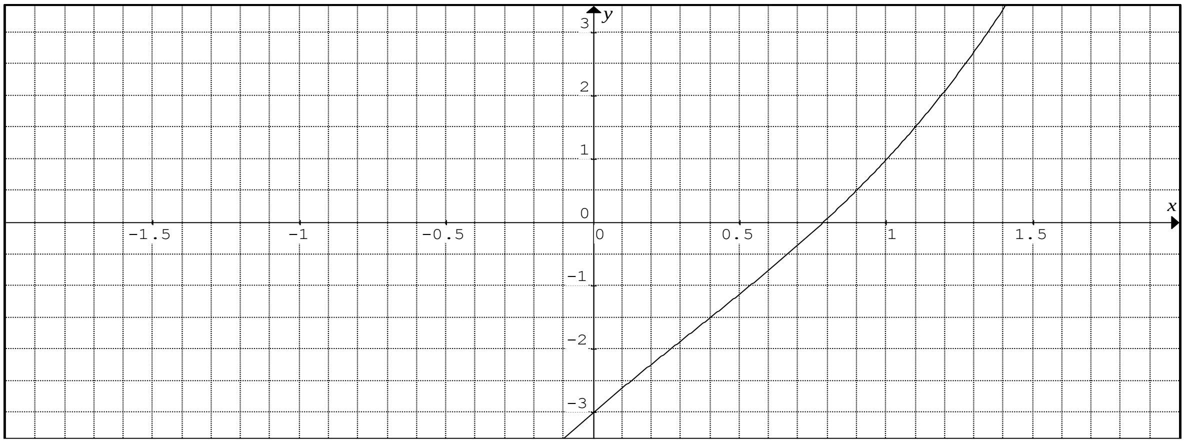
1. Si se tiene la gráfica de la función $f(x)$ entonces los puntos donde la gráfica corta al eje de las x, (supongamos x_1 y x_2) son los puntos donde la función se hace cero, es decir $f(x_1) = 0$ y $f(x_2) = 0$ y entonces x_1 y x_2 son los ceros de la función.



.

En el ejemplo que se plantea, empleando el graficador Graphmatica, se puede reducir el intervalo de solución a uno más pequeño que el intervalo dado. En la siguiente figura aparece el resultado de graficar la función asociada a la ecuación dada.

$f(x) = x^3 - x^2 + 4x - 3$



Se aprecia que la raíz se encuentra en el intervalo entre $[0{,}7; 0{,}8]$ y además al tratarse de una función polinómica, resultado de operaciones racionales con funciones continuas, f es entonces una función continua. Con lo realizado hasta aquí se han verificado las dos primeras hipótesis del método de bisección: f posee una sola raíz en el intervalo y es continua en dicho intervalo.

Para analizar el cumplimiento de la tercera condición o hipótesis del método, es necesario hallar las imágenes en los extremos del intervalo $[0{,}7; 0{,}8]$, efectuar el producto de ambas y verificar el signo.

$f(0{,}7) = (0{,}7)^3 - (0{,}7)^2 + 4(0{,}7) - 3 = 0{,}343 - 0{,}490 + 2{,}800 - 3 = -0{,}343 < 0$

$f(0{,}8) = (0{,}8)^3 - (0{,}8)^2 + 4(0{,}8) - 3 = 0{,}512 - 0{,}640 + 3{,}200 - 3 = 0{,}072 > 0$

Se cumple que: $f(0{,}7).f(0{,}8) < 0$

Para determinar la cantidad de iteraciones se debe reiterar que se pide una raíz con tres cifras decimales exactas, por lo que la tolerancia es $\varepsilon = 0{,}0005$, empleando la fórmula $n \geq \frac{ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{ln2}$, se obtiene:

$$n \geq \frac{ln\left(\frac{0{,}8-0{,}7}{0{,}0005}\right)}{\ln 2} = \frac{\ln\frac{0{,}1}{0{,}0005}}{\ln 2} = \frac{\ln 200}{ln2} = \frac{5{,}2981}{0{,}6931} = 7{,}6 \approx 8$$

CA:
$ln200 = \frac{lg200}{0{,}4343} = 0{,}2981$

El resultado anterior indica que se deberán realizar 8 iteraciones al aplicar el método de bisección, para obtener la raíz pedida. Las operaciones se pueden ilustrar en una tabla como la siguiente.

$Iter.$	a	b	$f(a)$	$f(b)$	x_n	$f(x_n)$	$E_m(x)$
1	0,7	0,8	$-0{,}343 < 0$	$0{,}072 > 0$	0,75	$-0{,}1406 < 0$	0,05
2	0,75	0,8	$-0{,}1406 < 0$	$0{,}072 > 0$	0,775	$-0{,}0412 < 0$	0,025
3	0,775	0,8	$-0{,}0412 < 0$	$0{,}072 > 0$	0,7875	$-0{,}0018 < 0$	0,0125
4	0,7875	0,8	$-0{,}0018 < 0$	$0{,}072 > 0$	0,7938	$0{,}0453 > 0$	0,00625
5	0,7875	0,7938	$-0{,}0018 < 0$	$0{,}0453 > 0$	0,7907	$0{,}032 > 0$	0,00315
6	0,7875	0,7907	$-0{,}0018 < 0$	$0{,}032 > 0$	0,7891	$0{,}0251 > 0$	0,0016
7	0,7875	0,7891	$-0{,}0018 < 0$	$0{,}0251 > 0$	0,7883	$0{,}0215 > 0$	0,0008
8	0,7875	0,7883	$-0{,}0018 < 0$	$0{,}0215 > 0$	0,7879	----------	0,0004

A continuación se plantean algunas formas de realizar las operaciones que se ubican en la tabla anterior. Para obtener la fila que ilustra la iteración No 1, por ejemplo:

De forma manual:

$f(0{,}7) = -0343, \quad f(0{,}8) = 0{,}072$

$f(0{,}75) = (0{,}75)^3 - (0{,}75)^2 + 4(0{,}75) - 3 = -0{,}1406$

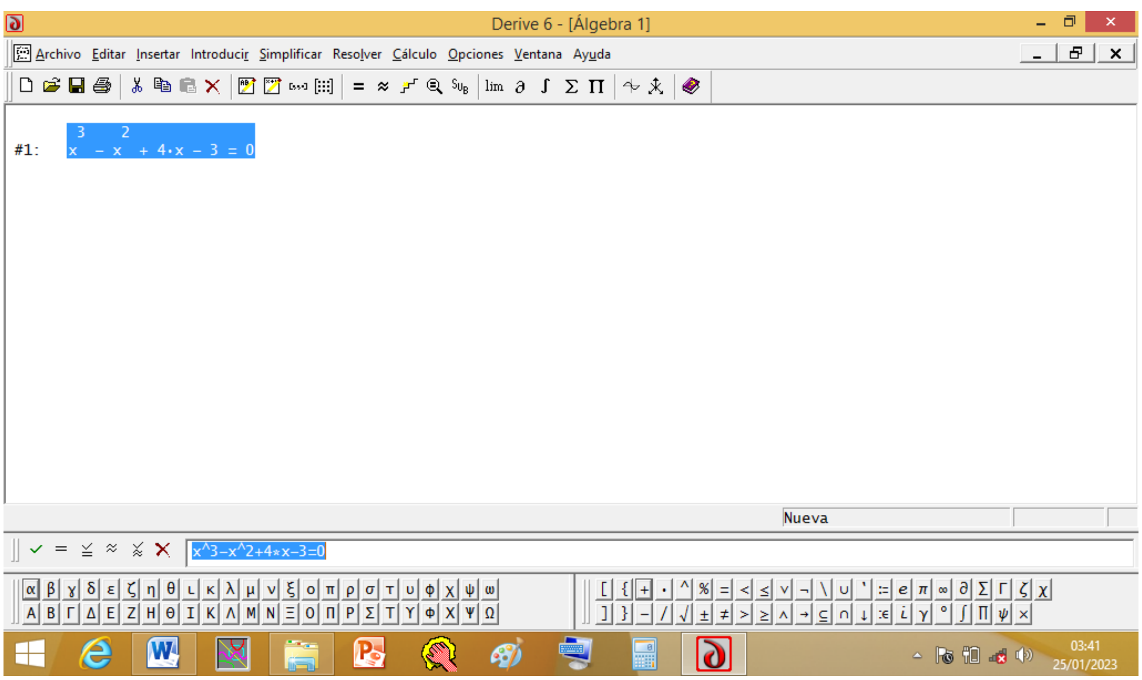
El error en la aproximación, se determina mediante la fórmula: $E_m(x_n) = \frac{b_n - a_n}{2}$

$E_m(x_1) = \frac{0{,}8-0{,}7}{2} = 0{,}05$ (Error en la primera iteración)

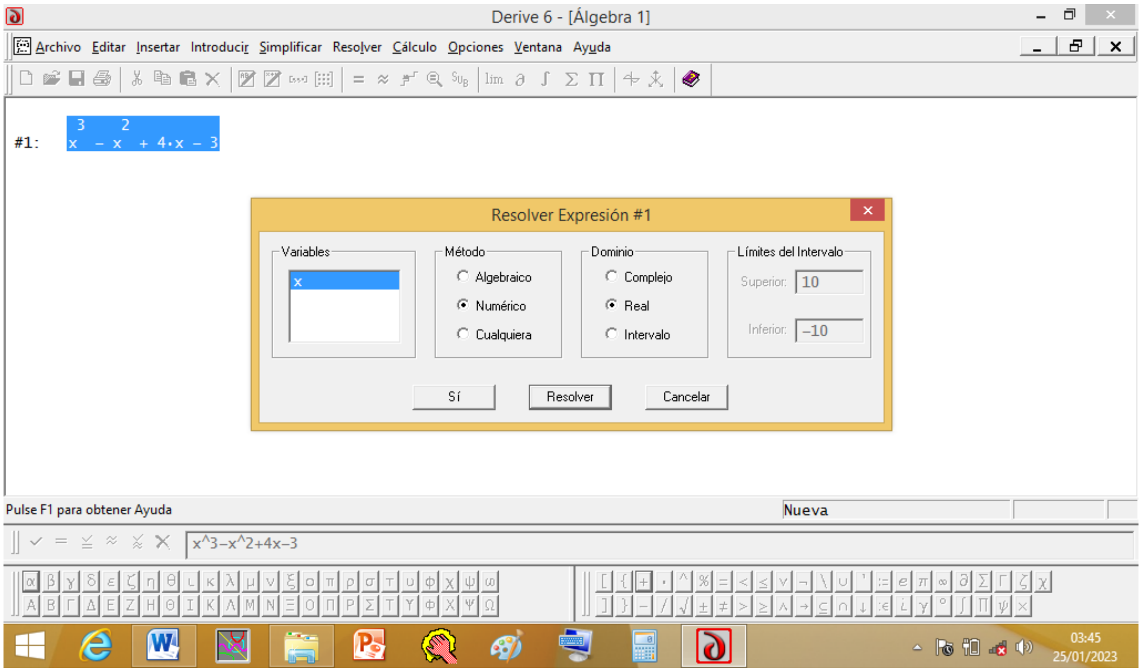
El último error absoluto máximo es menor que la tolerancia $\varepsilon = 0{,}0005$, al compararlos se obtiene: $0{,}0004 < 0{,}0005$, luego la raíz de la ecuación dada es: $x = 0{,}7879$ y como se pide con tres cifras decimales exactas se expresa: $x = 0{,}788$.

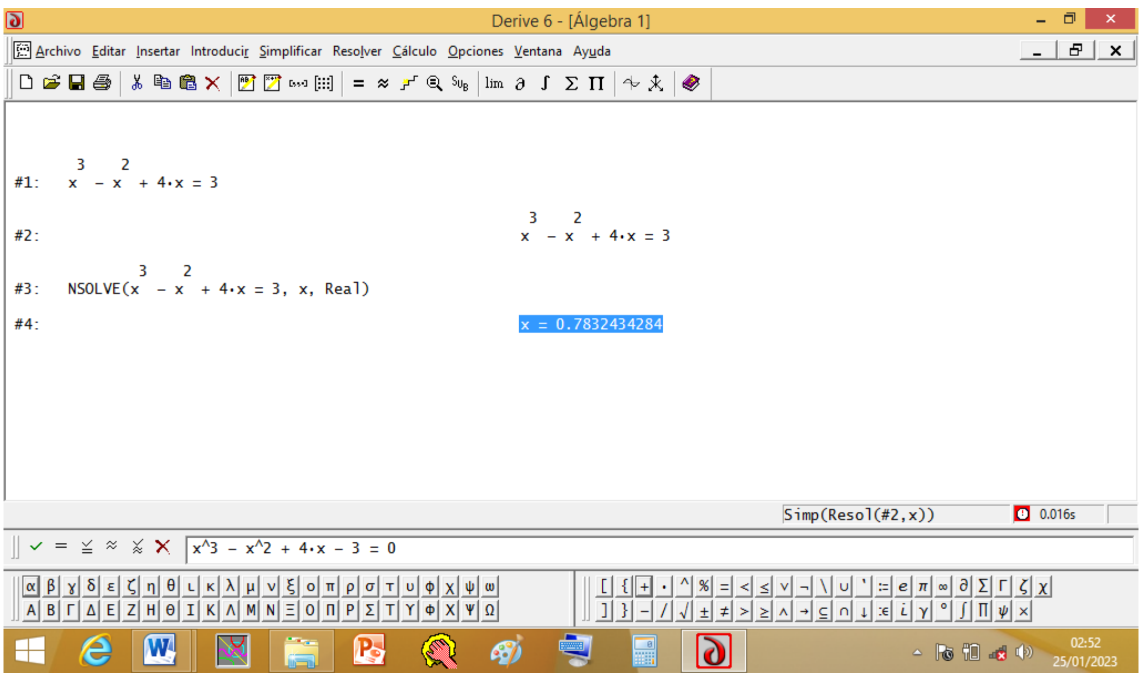
Los programas informáticos como el "DERIVE" son útiles para resolver estas ecuaciones por vía numérica. Las figuras siguientes ilustran como primeramente se escribe la ecuación en la barra inferior en lenguaje de computación, en esta misma barra a la izquierda se selecciona "Introducir expresión" y sale en pantalla con el #1 la ecuación en forma algebraica, seguidamente, se selecciona "Resolver expresión", en la barra superior y se muestra una tabla en la que se selecciona la variable "x", el método numérico, el dominio numérico y el intervalo se solución, que generalmente aparece predeterminado. Al hacer clic en "Resolver", se muestran nuevamente en la pantalla los datos planteados y el resultado con diez cifras decimales.

En caso necesario consulte la opción "Ayuda" del propio asistente matemático DERIVE, que le orientará con más detalles los pasos a seguir en su empleo.



,

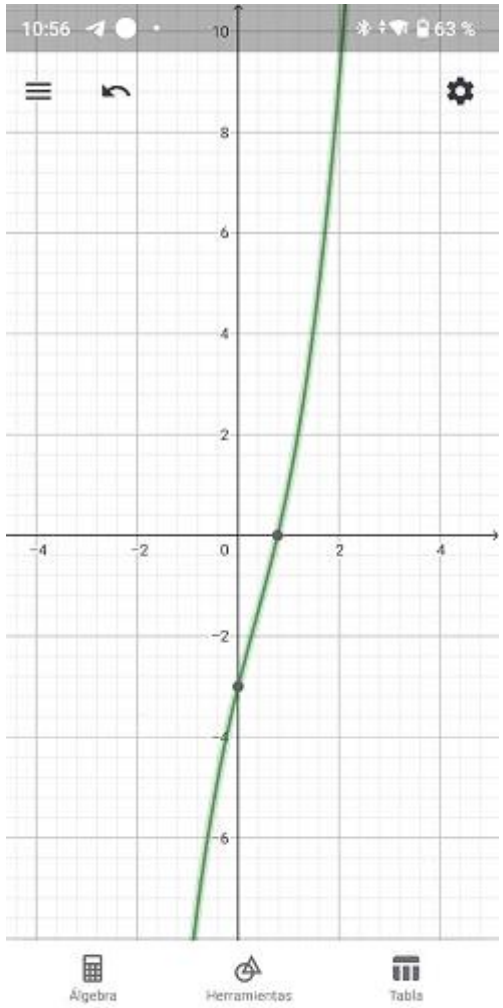




Se concluye que la solución es $x = 0{,}78324$ ....

Otro de los programas informáticos que se pueden emplear es el Geogebra, software libre de Matemática, creado por Markus Hohenwarter, profesor de la Universidad de Salzburgo. Este software está disponible en múltiples plataformas, fue introducido para facilitar el trabajo con la Geometría, pero su uso posterior demostró que estaba diseñado para interactuar dinámicamente en un ambiente en que se reúnen las disciplinas de la Matemático como la Geometría, el Álgebra, el Análisis y otras ciencias como la Física, el Dibujo técnico, etc.

La siguiente figura muestra la obtención del gráfico de la función asociada $f(x) = x^3 - x^2 + 4x - 3$, en la que se puede apreciar que la raíz de la ecuación está aproximadamente en el intervalo $[0; 1,5]$.



Conclusiones

La asignatura Matemática numérica tiene un enfoque metodológico didáctico único para el tratamiento de cada tipo de problema a resolver por vía numérica. Asimismo su enfoque filosófico está encaminado a fundamentar los métodos aproximados en un mismo cuerpo teórico, a valorar el papel de los métodos numéricos en la formación general de la Matemática como ciencia y su papel en la construcción de otras ciencias. Contribuye además a corroborar el carácter relativo de la verdad objetiva.

La Matemática Numérica posee valor práctico para resolver problemas de la ciencia y la técnica, ofrece métodos de autoaprendizaje de la Matemática, para el cálculo (aproximado), el trabajo con variables, la representación de funciones, métodos de demostración, etc.

El estudio de esta asignatura se justifica además porque al ser una prolongación del Análisis Matemático posee valor práctico para la solución de problemas del ámbito científico técnico, económico y social. Contribuye con su enseñanza a la formación de la cultura general, contribuye al desarrollo de habilidades generalizadas (cálculo, trabajo con variables, métodos de demostración, etc.). Contribuye además a la concepción ideopolítica del mundo basada en la filosofía marxista leninista y martiana.

Las transformaciones que en el campo educacional tienen lugar hoy en Cuba en todas las educaciones, se incluyen las tecnologías de la Informática. En este proceso de cambio y perfeccionamiento de los programas de estudio se ofrecen múltiples posibilidades para contribuir al desarrollo de la personalidad. En este contexto tiene lugar el proceso de enseñanza aprendizaje (PEA) y entre las asignaturas con dificultades para desarrollar este proceso está la Matemática Numérica. Así pues con este trabajo se expone una alternativa didáctica para insertar los recursos informáticos en la asignatura Matemática Numérica.

Esta alternativa didáctica ya fue aplicada a estudiantes del cuarto año de la especialidad de Matemática de la Unah "Fructuoso Rodríguez Pérez" y los resultados en cuanto a la motivación por el aprendizaje de nuevos procedimientos y métodos de trabajo fueron satisfactorios. En la actualidad se trabaja para insertar los programas informáticos en la modalidad de curso regular diurno de la asignatura citada y en otras afines.

Las alternativas didácticas y las variantes para insertar los recurso de las TIC presentadas tratan de suplir de alguna manera las insuficiencias detectadas en el PEA de la Matemática para las carreras de Ciencias Técnicas y pedagógicas que reciben dicha asignatura, ellas no son de obligatorio cumplimiento por los docentes; el objetivo de las mismas es sugerir algunas ideas que se pueden emplear para lograr en alguna medida el mejoramiento del PEA de la Matemática.

Bibliografía

Álvarez, M. y Guerra, A. (2004). *Matemática numérica*. La Habana, Cuba: Félix Varela.

Conde, C,(2017) "*Programación y métodos numéricos",* http://ocw.upm.es/matematica-aplicada/programacion-y-metodos-numericos/contenidos/TEMA_5/Apuntes/Derivacion_OCW.pdf, Madrid España.

Muto, V. (2006).*Curso de métodos numéricos*. País Vasco, España.

Nieves, A. (2014). *Métodos numéricos aplicados a la ingeniería*. Ciudad México, México: Patria.

Saavedra, P. (1996).*Matemático numérica*. Ciudad México, México: Publicaciones SMM.

Suárez, M. (1988).*Matemática Numérica*. La Habana, Cuba: Libros para la educación.

Programa Informático Derive. Universidad de Valencia. España.

Programa Informático Geogebra. Universidade de Salzburgo.