

---

## CAPÍTULO 1

---

# Una mirada conceptual sobre las ecuaciones diferenciales

### 1. Componentes teóricos de las ecuaciones diferenciales parciales.

Varias de las más importantes ideas en matemáticas son desarrolladas en el interior de las ciencias físicas y las ecuaciones matemáticas; especialmente las ecuaciones diferenciales parciales permiten establecer un lenguaje para formular estas ideas. De igual manera, avances en matemáticas permiten desarrollar nuevas perspectivas en las ciencias. A medida que los años pasan los matemáticos y científicos extienden sus metodologías para incluir todas las áreas de la ciencia y la tecnología. Este nuevo paradigma que surge es llamado modelamiento matemático, el cual corresponde conceptualmente a una ecuación, o un conjunto de ecuaciones, cuya solución describe el comportamiento físico de un sistema relacionado. En general, un modelo matemático es una descripción simplificada de la realidad en términos matemáticos, que, envuelve observación, análisis de las ecuaciones y simulación, y finalmente, validación del modelo para asegurar si las predicciones son acertadas.

Este primer capítulo tiene como objetivo desarrollar el estudio de las ecuaciones diferenciales parciales enfatizando como ejemplo particular la ecuación diferencial del calor. El capítulo se divide en tres partes: en primer lugar, se deduce la ecuación del calor desde principios de la física y las matemáticas, en segundo lugar se estudia la solución de las ecuaciones diferenciales parciales por métodos analíticos, y por ultimo se estudia la solución por métodos numéricos.

#### 1.1. Orígenes físicos de la ecuación del calor

Un conjunto amplio de ecuaciones diferenciales parciales tiene su origen en las leyes de balance, o leyes de conservación. Una ley de con-

servación es una formulación matemática del hecho de que la razón de cambio de una cantidad en el interior de un dominio es igual a la razón de cambio del flujo de la cantidad a través de la frontera, menos la razón a la cual la cantidad es creada en el interior del dominio. Por ejemplo, considere una población de una cierta especie animal en una región geográfica, la razón de cambio de la población es igual a la razón de cambio en que el animal migra en el interior de la región menos la razón a la que sale, más tasa de nacimientos, menos la tasa de muertes. Como ejemplo de aplicación de la ley de conservación se plantea el estudio de la transferencia de calor en tres dimensiones.

Sea  $R$  una región en el espacio donde el calor se encuentra fluyendo, y sea  $T(x,y,z,t)$  la función de temperatura en el tiempo  $t$  en un punto  $(x,y,z)$  en  $R$ . Se asume que la región es homogénea y es caracterizada por una constante de calor específico  $c$  y una constante de densidad  $\rho$ . Sea  $B$  una esfera arbitraria contenida en  $R$ . Al aplicar el principio de balance de energía a  $B$ , que afirma que la razón de cambio de la energía total en  $B$  es igual a la razón de cambio del flujo que cruza la frontera de  $B$  además de la variación de la energía generada en  $B$  por las fuentes. La cantidad total de calor en un elemento de volumen  $dV=dx dy dz$  es  $c\rho T dV$ , y por lo tanto el total de energía calórica en  $B$  esta dada por la integral triple

$$\text{Total de energía calórica en } B = \iiint_B c\rho T dV.$$

Es posible asumir que el calor generado por las fuentes es cuantificado por la función  $f(x,y,z,t)$ , donde  $f dV$  es la razón de cambio que se genera en  $dV$ ; por lo tanto, así la variación de calor generada por las fuentes en toda  $B$  es

$$\text{Razón de cambio de la energía producida en } B = \iiint_B f dV.$$

Es importante notar que  $f$  tiene dimensiones de energía por unidad de volumen, por unidad de tiempo.

La siguiente componente importante en la ecuación de conservación de energía es el campo vectorial que representa el flujo de calor  $\psi(x,y,z,t)$ ; su dirección corresponde a la dirección del flujo de calor en la posición  $(x,y,z)$  en el tiempo  $t$ . La razón a la que el flujo cruza un elemento de superficie oblicua  $dA$  orientada hacia afuera por el vector normal  $\mathbf{n}$  es

$$\psi \cdot \mathbf{n} dA.$$

En consecuencia, la razón de cambio del flujo de calor a través de la frontera de  $B$ , denotado por  $\partial B$ , es la integral de superficie

$$\int_{\partial B} \psi \cdot \mathbf{n} \, dA.$$

Por lo tanto, la ley de conservación, o ley de balance de energía, es

$$\frac{d}{dt} \iiint_B c\rho T \, dV = -\int_{\partial B} \psi \cdot \mathbf{n} \, dA + \iiint_B f \, dV \quad (1.1)$$

El signo negativo aparece en la ecuación a causa de la dirección del flujo.

Al aplicar una de las relaciones integrales fundamentales del cálculo en varias variables - **el teorema de la divergencia**. Este permite reescribir la integral de flujo en (1.1) como una integral de volumen. El teorema de la divergencia es una versión del teorema fundamental del cálculo en tres dimensiones.

### Teorema 1.1

**(Teorema de la divergencia)** Si un campo vectorial  $\psi$  es continuo y diferenciable sobre una región  $B$  y continua sobre  $B \cup \partial B$ , donde  $\partial B$  es la frontera, entonces

$$\iiint_B \operatorname{div} \psi \, dV = \int_{\partial B} \psi \cdot \mathbf{n} \, dA.$$

Usando el teorema de la divergencia es posible escribir la ecuación de balance (1.1) como

$$\frac{d}{dt} \iiint_B c\rho T \, dV = -\int_{\partial B} \operatorname{div} \psi \, dV + \iiint_B f \, dV$$

Ahora es posible colocar la derivada del tiempo en el interior de la integral y reorganizar los términos en una integral de volumen para obtener.

$$\iiint_B (c\rho T_t + \operatorname{div} \psi - f) \, dV = 0$$

Esta ecuación de balance es válida para cualquier esfera  $B$  en  $R$ , por lo tanto es posible quitar el integrando, dando paso a la ecuación en derivadas parciales

$$c\rho T_t + \operatorname{div} \psi - f = 0 \quad (1.2)$$

Para todo  $t$  y todo  $(x,y,z) \in R$ . La ecuación (1.2) es la forma local de **ecuación del calor** en tres dimensiones.

La ecuación presenta dos funciones incógnitas, la temperatura escalar  $T$  y el flujo de calor  $\psi$ . **La ley de conducción de calor de Fourier** afirma que el flujo de calor decrece en la dirección del gradiente. En símbolos,

$$\psi = -K\nabla(T). \quad (1.3)$$

Recordemos desde el cálculo que el gradiente negativo es la dirección del máximo decrecimiento. La constante de proporcionalidad  $K$  es la conductividad térmica. Sustituyendo (1.3) en (1.2) y usando la identidad

$$\operatorname{div}(\nabla(T)) = T_{xx} + T_{yy} + T_{zz},$$

Se genera la ecuación de temperatura  $T(x,y,z,t)$  en tres dimensiones:

$$c\rho T_t - K(T_{xx} + T_{yy} + T_{zz}) = f. \quad (1.4)$$

La expresión  $T_{xx} + T_{yy} + T_{zz}$  se llama **Laplaciano** de  $T$ , y es denotado por  $\Delta T$ . Finalmente, en resumen, **la ecuación de conducción del calor** puede escribirse como

$$T_t - k\Delta T = \frac{1}{c\rho}f, \quad (1.5)$$

Donde la constante  $k=K/(c\rho)$  es llamada la constante de difusión.

Cuando se indica que la temperatura en la frontera de  $R$  esta definida por

$$T(x,y,z) = g(x,y,z), \quad (x,y,z) \in \partial R,$$

Se dice que la ecuación (1.5) satisface las condiciones **tipo Dirichlet**.

## 1.2. Método de Fourier.

Para ilustrar el método de Fourier en la solucionar la ecuación (1.5), se considera el siguiente problema de valores iniciales con valores en la frontera en el contexto de la conducción de calor,

$$T_t = T_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \quad (1.6)$$

$$T(0,t) = T(\pi,t) = 0, \quad t > 0, \quad (1.7)$$

$$T(x,0) = f(x), \quad 0 < x < \pi. \quad (1.8)$$

El método de Fourier consiste en la separación de variables en la forma,

$$T(x,t) = h(x)g(t).$$

Al sustituir este producto en la ecuación en la ecuación (1.6), (1.7) y (1.8) se obtiene

$$h(x)g'(t) = h''(x)g(t), \quad h(0)g(t) = 0, \quad h(\pi)g(t) = 0.$$

Como  $g(t)$  no es la función nula, es posible escribir las ecuaciones anteriores como

$$\frac{g'(t)}{g(t)} = \frac{h''(x)}{h(x)} = -\lambda, \quad h(0) = h(\pi) = 0,$$

para alguna constante  $\lambda$ . Esto es válido ya que es la única forma de igualar dos funciones con diferentes parámetros. La constante  $-\lambda$  es llamada la constante de separación. Por lo tanto, se genera una ecuación diferencial ordinaria para  $g$  en el dominio del tiempo, a saber,

$$g'(t) = -\lambda g(t),$$

y además se genera un problema en la frontera para la variable espacial  $h$ ,

$$-h''(x) = \lambda h(x), \quad 0 < x < \pi, \quad (1.9)$$

$$h(0) = 0, \quad h(\pi) = 0. \quad (1.10)$$

La técnica de separación de variables tiene la ventaja de convertir un problema de ecuaciones en derivadas parciales en un problema en ecuaciones diferenciales en una variable.

Es fácil demostrar que la solución para la ecuación  $g$ , tiene la forma,

$$g(t) = e^{-\lambda t}.$$

Para solucionar las ecuaciones (1.9) y (1.10) se procede por casos. En los casos en que  $\lambda=0$  y  $\lambda < 0$  se genera la solución trivial. Cuando  $\lambda > 0$ , o  $\lambda = \alpha^2$ . En este caso la ecuación (1.9) tiene la forma

$$h'' + \alpha^2 h = 0,$$

para la cual las soluciones son:

$$h(x) = A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x).$$

En primer lugar,  $h(0) = 0$  conduce a que  $A = 0$ . Así  $h(x) = B\sin(\alpha x)$ . La segunda condición de frontera implica que:

$$h(\pi) = B\sin(\alpha\pi) = 0.$$

El hecho de que  $B \neq 0$ , fuerza a que

$$\lambda = \lambda_n = n^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

Los anteriores valores para  $\lambda$  permiten generar soluciones no triviales

$$h = h_n(x) = \sin(nx), \quad n = 1, 2, \dots$$

Al regresar a la solución  $g(t) = e^{-\lambda t}$ . Se sustituyen los valores de  $\lambda = \lambda_n = n^2$ .

Lo cual genera el conjunto de soluciones

$$g_n(t) = e^{-n^2 t}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Por lo tanto, las soluciones para las ecuaciones (1.6-1.8) son

$$T_n(x, t) = g_n(t)h_n(x) = e^{-n^2 t} \sin(nx), \quad n = 1, 2, \dots$$

Para calcular una solución que satisface las condiciones iniciales (1.8), al usar el principio de superposición y la forma de combinación lineal

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 t} \sin(nx), \quad (1.11)$$

La ecuación (1.8) implica que

$$T(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx).$$

Mediante el uso de la teoría de funciones ortogonales, los coeficientes de Fourier están dados por

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \text{sen}(nx) dx. \quad (1.12)$$

En resumen, la solución del problema de frontera con condiciones iniciales (1.6), (1.7) y (1.8) esta dada por la serie (1.11) donde los coeficientes  $b_n$  están dados por (1.12).

### 1.3. Métodos numéricos.

La dificultad en muchos casos de la búsqueda de soluciones analíticas para ecuaciones diferenciales parciales, sugiere la exploración de métodos alternativos que permitan el uso de las herramientas tecnológicas. Los métodos numéricos son un conjunto de estrategias conceptuales y practicas que permiten resolver ecuaciones diferenciales con un amplio poder de precisión. La idea fundamental de la estrategia consiste en convertir un problema arbitrario en una versión discreta del mismo, que se pueda implementar en un computador. Para las aplicaciones que se describen en el libro, se desarrollaran dos tipos de métodos numéricos, el método explícito y el método implícito. En lo que sigue se realizará una breve descripción del método de diferencias finitas.

El esquema de la solución de las ecuaciones por los métodos numéricos se conoce con el nombre de **diferencias finitas**, tiene como fundamento la definición de la derivada como razón de cambio.

El primer paso para la construcción método de solución es **discretizar** la región de espacio-tiempo donde se desea obtener la solución. Para este caso la región es  $0 \leq x \leq l$ ,  $0 \leq t \leq T$ . Es necesario colocar una cota sobre el tiempo ya que en la práctica el problema se resuelve en un tiempo finito. Discretizar significa definir un retículo de puntos en la región de espacio-tiempo dada por

$$x_j = jh, \quad t_n = nk, \quad j = 0, 1, \dots, J; \quad n = 0, 1, \dots, N,$$

Donde los números fijos  $h$  y  $k$  son los pasos espaciales y temporales. Aquí  $h=1/J$  y  $k=1/N$ . El entero  $J$  es el numero de subintervalos en  $0 \leq x \leq l$ , y  $N$  es el numero es numero de iteraciones que se pueden tomar. Para cada nodo  $(x_j, t_n)$  del retículo se busca una aproximación, la cual llamaremos  $T_j^n$ , la cual aproxima el valor exacto de la solución  $u(x_j, t_n)$ . Se define

$T_j^n$  como una matriz de tamaño  $n \times j$ . Para obtener las ecuaciones para  $T_j^n$  se sustituyen las derivadas de la ecuación del calor por las siguientes diferencias divididas:

$$T_t(x_j, t_n) \approx \frac{T(x_j, t_{n+1}) - T(x_j, t_n)}{k}$$

$$T_{xx}(x_j, t_n) \approx \frac{T(x_{j-1}, t_n) - 2T(x_j, t_n) + T(x_{j+1}, t_n)}{h^2}.$$

Al sustituir en la ecuación del calor las anteriores aproximaciones se genera una expresión para  $T_j^{n+1}$ ,  $T_j^{n+1} = T_j^n + \frac{kD}{h^2}(T_{j-1}^n - 2T_j^n + T_{j+1}^n)$

Nótese que la aproximación depende de los puntos.

$$(x_{j-1}, t_n), (x_j, t_n), (x_{j-1}, t_n), (x_j, t_{n+1}).$$

Desde la condición inicial y las condiciones de frontera nosotros sabemos que

$$T_0^n = 0, T_j^n = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N$$

La fórmula para  $T_j^{n+1}$  puede ser ahora aplicada en todo el interior del retículo, iniciando con los valores en  $t=0$ , para calcular los valores en  $t=t_1$  y así continuar. Así es posible calcular la función  $T_j^n$  por filas. Debido al error de aproximación en las diferencias divididas, se puede demostrar que se debe tener una condición de estabilidad  $\frac{kD}{h^2} \leq \frac{1}{2}$  para que el método funcione.