CAPÍTULO 2

Ecuaciones diferenciales Parciales en ingeniería

2. Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales parciales a la ingeniería.

Este capítulo tiene como principal objetivo aplicar las herramientas conceptuales desarrolladas en el capitulo 1 al estudio de la transferencia de calor en una dimensión en los casos de geometrías rectangulares y cilíndricas. En primer lugar, se estudia la transferencia de calor en un horno tipo Hoffman; en cuanto a la metodología de trabajo, sigue el orden del capitulo 1, se plantea en modelo matemático, se estudian las soluciones numéricas y analíticas y por último se comparan los resultados. El segundo caso de estudio se contextualiza la transferencia del calor en dispositivos sin uso de electricidad; es importante resaltar, que la geometría dominante es la cilíndrica. Al igual que en el caso rectangular se sigue la misma metodología de estudio.

2.1. Estudio de la transferencia de calor en un horno tipo Hoffman.

El estudio de la transferencia de calor es un ejemplo relevante en la aplicación de las ecuaciones diferenciales parciales a la ingeniería. El siguiente estudio de caso tiene como objetivo mostrar este hecho desde el punto de vista metodológico y didáctico.

Para modelar la transferencia de calor en una placa unidimensional se utilizan los datos experimentales producto de las investigaciones del profesor Gustavo Guerrero al medir la temperatura de un horno tipo Hoffman en diferentes puntos de una pared (Guerrero et al., 2013,2015, 2017, 2018). Un sistema de adquisición de datos fue diseñado para registrar las temperaturas del proceso de cocción obtenido a partir de 16 termopares tipo K, por lo que se utilizaron dos tarjetas de adquisición en la cual se instalaron 8 termopares en cada una, en la primera tarjeta o bloque de adquisición se registraron las temperaturas interiores en el horno en la segunda tarjeta de adquisición se registraron temperaturas exteriores, para luego ser almacenadas a través del software LabView en el reporte de adquisición y generar los perfiles de temperatura de las posiciones de la cámara escogida como referencia para las mediciones. La adquisición de datos se realizó en la cámara 22 del horno, la producción de ladrillo H 10x40 en esta fue de 33.000 unidades.

En el modelo que vamos a estudiar se tienen en cuenta la temperatura de la pared externa, interior y centro interior.

Para encontrar el modelo matemático que permita conocer la temperatura en función de la posición y el tiempo (estamos considerando una dimensión espacial), calculamos un promedio de las temperaturas (cada hora) de los datos experimentales de las paredes externa e interna del horno. La anterior consideración nos permitió generar los siguientes datos que reflejan las condiciones de frontera del modelo de cambio de temperatura en el horno tipo Hoffman.

Horas	**Temperatura en grados centígrados de la pared externa : f_1 (t)**	**Temperatura en grados centígrados de la pared interna: f_2 (t)**
1	19.85	30.25
2	19.97	32.20
3	19.68	33.64
4	19.48	36.09
5	19.65	39.75
6	20.01	49.75
7	19.48	57.90
8	20.02	81.91
9	21.42	134.41
10	24.33	343.20
11	35.89	668.17
12	48.47	594.34
13	70.16	747.75
14	133.44	712.23
15	144.67	691.35

El modelo matemático que soporta los datos de la anterior tabla es la ecuación del calor deducida en la sección 1.1 junto con las adecuadas condiciones de frontera y condiciones iniciales.

$$T_t = kT_{xx}, \quad 0 < x < l, t > 0, \tag{2.1}$$

$$T(0,t) = f_1(t), \quad T(l,t) = f_2(t), \quad t > 0 \tag{2.2}$$

$$T(x,0) = f(x), \quad 0 < x < l \tag{2.3}$$

Las funciones escalonadas $f_1(t)$ y $f_2(t)$ representan los datos experimentales de las temperaturas de la pared externa e interna del horno. En adelante se representa el modelo matemático que representan las ecuaciones (2.1)-(2.3) como **EDP1**.

Para solucionar el modelo **EDP1**, el primer paso es convertir las condiciones de frontera de la ecuación (2.2) en condiciones homogéneas, con la finalidad de aplicar el método de separación de variables estudiado en la sección 1.2.

$$h(x,t) = f_1(t) + \frac{x}{l}(f_2(t) - f_1(t)),$$

tal que $\hat{T}(x,t) = T(x,t) - h(x,t)$.

Nuestro objetivo es observar que tipo de modelo verifica la función $\hat{T}$. Para este fin nosotros notamos que

$$h_{xx}(x,t) = 0 \quad h_t(x,t) = f_1{}'(t) + \frac{x}{l}(f_2{}'(t) - f_1{}'(t)).$$

Nosotros observamos que

$$\hat{T}_t - k\hat{T}_{xx} = -h_t(x,t)$$

y

$$\hat{T}(0,t) = \hat{T}(0,t) - h(0,t) = 0\,, \qquad \hat{T}(l,t) = \hat{T}(l,t) - h(l,t) = 0,$$

$$\hat{T}(0,x) = f(x) - h(x,0) = f(x) - (f_1(0) + \frac{x}{l}(f_2(0) - f_1(0)) \equiv \hat{T}_0(x)$$

Por lo anterior, la función $\hat{T}$ verifica el modelo notado por **EDP2:**

$$\hat{T}_t = k\,\hat{T}_{xx} - h_t(x,t)\,, \qquad 0 < x < l, t > 0, \tag{2.4}$$

$$\hat{T}(0,t) = 0, \quad T(l,t) = 0, \quad t > 0 \tag{2.5}$$

$$\hat{T}(x,0) = \hat{T}_0(x), \quad 0 < x < l. \tag{2.6}$$

Al conjunto de ecuaciones (2.4)-(2.5) se aplica el método de Fourier estudiado en el la sección 1.2. Por lo tanto la solución del modelo **EDP1** es :

$$T(x,t) = \hat{T}(x,t) + h(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{T}_n(t)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{l} + h(x,t) \tag{2.7}$$

donde

$$\hat{T}_n(t) = e^{-n^2\pi^2 t}\left[\,\hat{T}_{0,n} + \int_0^t e^{n^2\pi^2 s}\,h_n(s)\,ds\right],$$

$$\hat{T}_{0,n} = 2\int_0^l \hat{T}_0(x)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

y

$$h_n(t) = -2\int_0^l h_t(x,t)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

La complejidad de la ecuación (2.7) sugiere un enfoque más natural para analizar el modelo **EDP1.** Por lo tanto, lo que sigue en la sección propone estudiar dos esquemas de solución numérica.

El método numérico explícito para solucionar el modelo **EDP1** consiste en sustituir la función incógnita $T(r,t)$ por las aproximaciones de las derivadas parciales que se generan de la serie de Taylor correspondiente:

$$T_t(r_j,t_n) = \frac{T(r_j,t_{n+1}) - T(r_j,t_n)}{\Delta t} \tag{2.7}$$

$$T_{xx}(x_j,t_n) = \frac{T(x_{j-1},t_n) - 2T(x_j,t_n) + T(x_{j+1},t_n)}{(\Delta x)^2} \tag{2.8}$$

Las ecuaciones (2.7) y (2.8) generan una versión discretizada del modelo **EDP1,** al sustituir estas ecuaciones se generan las relaciones recursivas correspondientes:

$$T_1^{k+1} = s\left(T_2^k + T_0^k\right) + (1-s)T_1^k$$

$$T_j^{k+1} = s\left(T_{j+1}^k + T_{j-1}^k\right) + (1-s)T_1^k$$

$$T_n^{k+1} = s\left(T_{n+1}^k + T_{n-1}^k\right) + (1-s)T_n^k$$

donde $s = \frac{k\,\Delta t}{(\Delta r)^2}$. Para el caso n=3, las relaciones recursivas se reflejan en el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 1-2s & s & 0 \\ s & 1-2s & s \\ 0 & s & 1-2s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T_1^k \\ T_2^k \\ T_3^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} sf(t_0) \\ 0 \\ sg(t_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1^{k+1} \\ T_2^{k+1} \\ T_3^{k+1} \end{pmatrix}$$

Solucionar el modelo **EDP1** es equivalente a solucionar el anterior sistema de ecuaciones. La ventaja de está aproximación tiene que ver con el uso de herramientas computacionales eficientes que permiten solucionar sistemas de ecuaciones de forma eficiente.

De manera similar al método anterior, el método implícito para solucionar el modelo EDP1 consiste en sustituir la función incógnita T(r,t) por las aproximaciones de las derivadas parciales que se generan de la serie de Taylor correspondiente:

$$T_t\left(r_{j,}t_n\right) = \frac{T\left(r_{j,}t_{n+1}\right) - T\left(r_{j,}t_n\right)}{\Delta t} \qquad (2.9)$$

$$T_{xx} = \frac{T\left(x_{j-1,}t_{n+1}\right) - 2T\left(x_{j,}t_{n+1}\right) + T\left(x_{j+1,}t_{n+1}\right)}{(\Delta x)^2} \qquad (2.10)$$

Las ecuaciones (2.9) y (2.10) generan una versión discretizada del modelo **EDP1**, al sustituir estas ecuaciones se generan las relaciones recursivas correspondientes:

$$T_1^k = -s\left(T_2^{k+1} + T_0^{k+1}\right) + (1+s)T_1^{k+1}$$

$$T_j^k = -s\left(T_{j+1}^{k+1} + T_{j-1}^{k+1}\right) + (1+s)T_1^{k+1}$$

$$T_n^k = -s\left(T_{n+1}^{k+1} + T_{n-1}^{k}\right) + (1+s)T_n^{k+1}$$

donde $s = \frac{k\,\Delta t}{(\Delta r)^2}$.

Para el caso n=3, las relaciones recursivas se reflejan en el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 1+2s & -s & 0 \\ -s & 1+2s & -s \\ 0 & -s & 1+2s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T_1^{k+1} \\ T_2^{k+1} \\ T_3^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sf(t_0) \\ 0 \\ sg(t_4) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T_1^{k} \\ T_2^{k} \\ T_3^{k} \end{pmatrix}$$

2.2. Estudio de la transferencia térmica en dispositivos sin uso de electricidad.

Un dispositivo de refrigeración sin uso de la electricidad consiste en dos vasijas. La vasija externa es de un material poroso que aloja en su interior otra vasija de un material permeable al agua. La vasija interna contiene la materia a refrigerar, el espacio entre las vasijas se encuentra relleno de arena húmeda; el efecto de refrigeración en el dispositivo se produce por la evaporación del agua, la transmisión de calor de la materia hacia la arena y la influencia del aire.

El grosor de las vasijas y la capa de arena son otros parámetros geométricos importantes. Al aumentar el grosor se incrementa la resistencia térmica de la conducción del calor, logrando mantener el dispositivo frio, pero al mismo tiempo evitando el enfriamiento por evaporación. De nuevo la elección del tamaño del dispositivo depende de las necesidades del uso de la nevera y la fuente de agua disponible. La función de la arena es estabilizar la vasija interior y a su vez distribuir el agua a lo largo del dispositivo por la acción capilar.

En orden para simplificar el modelo físico del refrigerador de dos vasijas, en el articulo (Chemin et al., 2017) diseñan un experimento en un conjunto de cilindros alargados los cuales contienen agua o etanol, simulando la materia a refrigerar. Los cilindros son cubiertos con toallas de papel que son humedecidas con un líquido.

Para construir un modelo teórico pertinente en el estudio del proceso de refrigeración, (Chemin et al., 2017) utiliza cilindros de mayor altura en relación con su diámetro, además el modelo teórico bajo consideración es en dos dimensiones. La parte superior del cilindro es tapada, para asegurar que el gradiente de temperatura sea radial y reducir el efecto de convección en el interior del fluido. En adelante, el modelo de refrigeración de dos vasijas se estudiará sobre un cilindro.

Para plantear el modelo matemático que fundamenta el proceso térmico en el dispositivo, por la geometría cilíndrica se realiza el siguiente cambio de coordenadas.

Sea $x = r\cos\theta$, $y = r\,sen\,\theta$, $z = z$. La regla de la cadena nos permite calcular las derivadas T_{xx} y T_{yy} en términos de las derivadas respecto a r y θ. Al calcular T_x se tiene:

$$T_x = T_r r_x + T_\theta \theta_x = (\cos\theta)\, T_r - \frac{sen\,\theta}{r} T_\theta \qquad (2.11)$$

Por lo tanto, la segunda derivada parcial es:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 = cos^2\theta \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2sen\,\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta} + \frac{sen^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{2\cos\theta\, sen\,\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{sen^2\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r} \qquad (2.12)$$

De igual manera por un razonamiento similar,

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 = sen^2\theta \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2sen\,\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta} + \frac{cos^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{2\cos\theta\, sen\,\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{cos^2\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r} \qquad (2.13)$$

Al sustituir (2.12) y (2.13) en la ecuación (1.5) se tiene la ecuación del calor en coordenadas cilíndricas:

$$T_t = T_{rr} + \frac{1}{r}T_r + \frac{1}{r^2}T_{\theta\theta} + T_{zz} \qquad (2.14)$$

Consideremos la difusión de calor en un cilindro sólido, de diámetro a, altura h, densidad ρ, calor especifico c, conductividad térmica λ, temperatura inicial T_i, colocado en un ambiente a temperatura T_0. La ecuación del calor (2.14) en estado transitorio con difusión radial, cn las adecuadas condiciones de frontera es

$$T_t = k\left(T_{rr} + \frac{1}{r}T_r\right) \qquad (2.15).$$

$$T(0,R) = T_0 \qquad (2.16)$$

$$T(r,0) = T_i, \quad 0 \le r < R \qquad (2.17)$$

La técnica para solucionar la ecuación es suponer que $T(r,t) = y(r)g(t)$, la ecuación se descompone en

$$\frac{g'(t)}{kg(t)} = \frac{y''(r) + \frac{1}{r}y'(r)}{y(r)} = -\lambda.$$

La solución para $g(t)$ es resuelta de la forma usual y se obtiene $g(t) = e^{-\lambda kt}$. La solución para la ecuación en y es

$$y''(r) + \frac{1}{r}y'(r) = -\lambda y(r).$$

Aplicando las condiciones de frontera nosotros tenemos las soluciones

$$T(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\lambda kt} J_0\left(\frac{z_n r}{R}\right) \quad (2.18).$$

Los coeficientes se obtienen aplicando las condiciones iniciales.

Una aproximación de la ecuación (15) se genera al tener el primer término el cual es

$$T(r,t)=c_1 e^{-\lambda kt} J_0\left(\frac{z_1 r}{R}\right) \quad (2.19),$$

donde la función $f(t) = c_1 e^{-\lambda kt}$ representa la temperatura de la línea central. Esto quiere decir que un enfoque adecuado para estudiar el modelo del cambio de temperatura en el interior del cilindro consiste en estudiar la temperatura en el centro del cilindro.

La ecuación (2.19), la podemos escribir como

$$f(t)=(T_i-T_0)e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (2.20),$$

donde $\tau=(\frac{a}{2J_0})^2\frac{\rho c}{\lambda}$.

Al igual que en la sección anterior se desarrollan métodos numéricos para solucionar las ecuaciones (2.15)-(2.17).

El método numérico explícito consiste en sustituir la función incógnita $T(r,t)$ por las aproximaciones de las derivadas parciales que se generan de la serie de Taylor correspondiente:

$$T_t(r_j,t_n)=\frac{T(r_j,t_{n+1})-T(r_j,t_n)}{\Delta t} \quad (2.21)$$

$$T_{rr}(r_j,t_n)=\frac{T(r_{j-1},t_n)-2T(x_j,t_n)+T(x_{j+1},t_n)}{(\Delta r)^2} \quad (2.22)$$

Las ecuaciones (31) y (32) generan una versión discretizada del modelo **EDPcil**, al sustituir estas ecuaciones se generan las relaciones recursivas correspondientes:

$$T_1^{k+1} = T_1^k + \frac{k\,\Delta t}{2r\Delta r}[T_2^k - T_0^k] + \frac{k\,\Delta t}{(\Delta r)^2}[T_0^k - 2T_1^k + T_2^k] \qquad (2.23)$$

$$T_j^{k+1} = T_i^k + \frac{k\,\Delta t}{2r\Delta r}[T_{j+1}^k - T_{j-1}^k] + \frac{k\,\Delta t}{(\Delta r)^2}[T_{j+1}^k - 2T_j^k + T_{j-1}^k] \qquad (2.24)$$

$$T_n^{k+1} = T_n^k + \frac{k\,\Delta t}{2r\Delta r}[T_{n+1}^n - T_{n-1}^n] + \frac{k\,\Delta t}{(\Delta r)^2}[T_{n+1}^n - 2T_n^n + T_{n-1}^n] \qquad (2.25)$$

Si $s = \frac{k\,\Delta t}{(\Delta r)^2}$ las relaciones recursivas se pueden condensar en el siguiente sistema de ecuaciones, para n=3:

$$\begin{pmatrix} 1-\frac{s}{2j}-s & \frac{s}{2j}+s & 0 \\ s-\frac{s}{2j} & 1-2s & s+\frac{s}{2j} \\ 0 & s-\frac{s}{2j} & 1-2s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T_1^{k+1} \\ T_2^{k+1} \\ T_3^{k+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 20(\frac{s}{2j}+s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1^k \\ T_2^k \\ T_3^k \end{pmatrix}$$

Solucionar el modelo matemático para el comportamiento térmico del dispositivo sin uso de electricidad es equivalente a solucionar el anterior sistema de ecuaciones.

El planteamiento para el método numérico implícito es equivalente a las siguientes aproximaciones:

$$\frac{T_j^{n+1} - T_j^n}{\Delta t} = k\,\frac{T_{j-1}^{n+1} - 2T_j^{n+1} + T_{j+1}^{n+1}}{(\Delta r)^2} \qquad (2.26)$$

Usando la ecuación (2.26), el modelo se genera la relación recursiva:

$$T_{j+1}^{k+1}\left[-s-\frac{s}{2j}\right] + T_{j-1}^{k+1}\left[-s+\frac{s}{2j}\right] + T_j^{k+1}[1+2s] = T_j^k$$

Donde el sistema de ecuaciones para el vector de temperaturas T^k para el caso n=3 es:

$$\begin{pmatrix} 1+\frac{s}{2j}+s & -\frac{s}{2j}-s & 0 \\ -s+\frac{s}{2j} & 1+2s & -s-\frac{s}{2j} \\ 0 & -s-\frac{s}{2j} & 1+2s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T_1^k \\ T_2^k \\ T_3^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 20(-\frac{s}{2j}-s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1^{k+1} \\ T_2^{k+1} \\ T_3^{k+1} \end{pmatrix} \qquad (2.27)$$