

## CAPÍTULO 3

# Modelamiento Matemático

### 3. Resultados del modelamiento matemático.

El objetivo del presente capítulo es mostrar mediante la modelación computacional como las soluciones numéricas de los ejemplos de las aplicaciones del capítulo anterior se ajustan de manera favorable con los resultados experimentales derivados de la teoría de la transferencia de calor.

#### 3.1. Modelamiento para el caso de la transferencia de calor en un horno tipo Hoffman.

En el capítulo anterior en la sección 2.1 se derivaron un conjunto de expresiones recursivas, que permitieron transferir el problema de tipo continuo de las soluciones de la ecuación del calor a un problema de calcular soluciones para un sistema lineal. Vamos a revisar los resultados del modelamiento para los casos de los métodos numéricos explícitos e implícitos.

##### a. Método numérico explícito.

Las relaciones recursivas se sintetizan en el siguiente sistema de ecuaciones.

Para el caso  $n=3$ , las relaciones recursivas se reflejan en el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 1 - 2s & s & 0 \\ s & 1 - 2s & s \\ 0 & s & 1 - 2s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1^k \\ T_2^k \\ T_3^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} sf(t_0) \\ 0 \\ sg(t_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1^{k+1} \\ T_2^{k+1} \\ T_3^{k+1} \end{pmatrix}$$

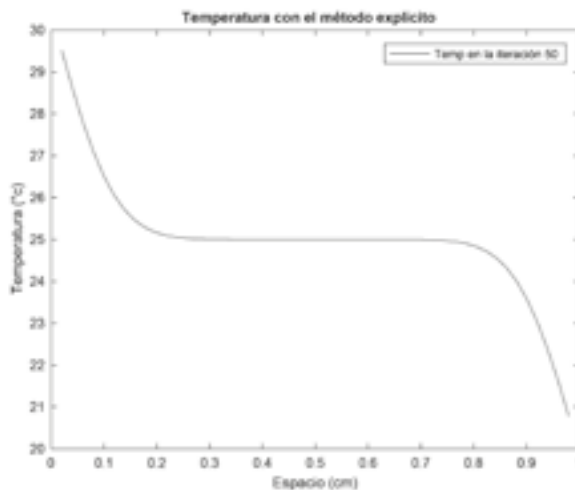
Donde,  $s = \frac{k \Delta t}{(\Delta r)^2}$

Los parámetros empleados en el diseño del código en Matlab fueron:

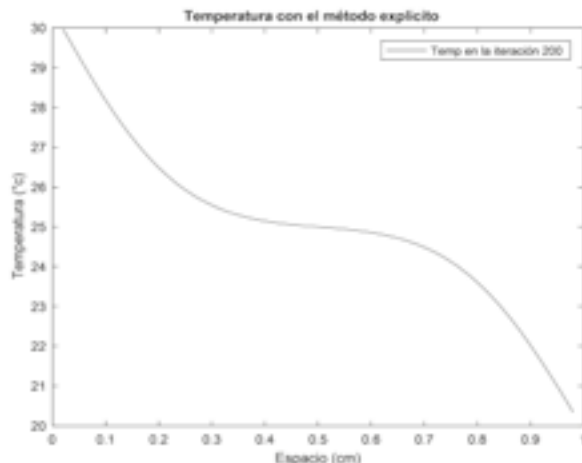
Parámetros	Datos
Ancho de la pared del horno	1 metro
Número de puntos en la dirección de x	2000
Paso en la dirección de x	1/50
Paso en la dirección de t	43200/2000
Constante de difusión térmica	0.000004
Parámetro de convergencia	0.2160
Temperatura en el interior del muro	25 grados centígrados

Las siguientes gráficas muestran la evolución de la temperatura de las paredes externa e interna en el horno tipo Hoffman desde el inicio del proceso.

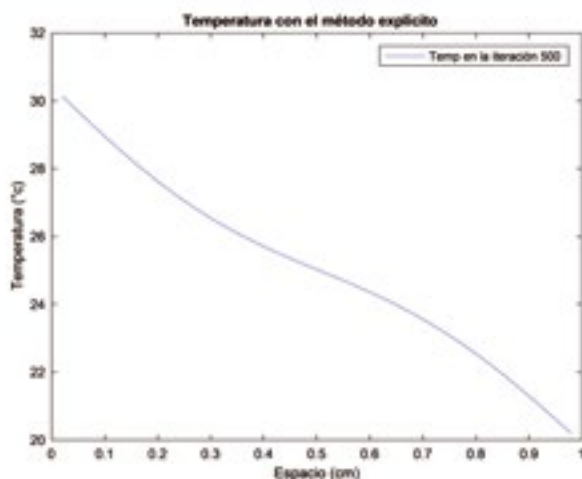
La primera gráfica muestra el comportamiento del modelo computacional generado por el método numérico explícito cuando se encuentra en la iteración 50. Es importante notar que esta primera gráfica muestra el inicio del proceso de la transferencia térmica en las paredes del horno, es decir las condiciones iniciales cuando la temperatura interior del muro es de 25 grados centígrados, la temperatura en la pared interior es de 30 grados centígrados y la temperatura en la pared exterior presenta una temperatura de 20 grados. Los resultados de la primera gráfica se ajustan con los datos experimentales presentados en el segundo capítulo.



La siguiente gráfica muestra el perfil de la temperatura en la iteración 200. Se observa en el comportamiento de la curva un ligero cambio en la temperatura de pared interna mostrando una leve tendencia hacia una función lineal.

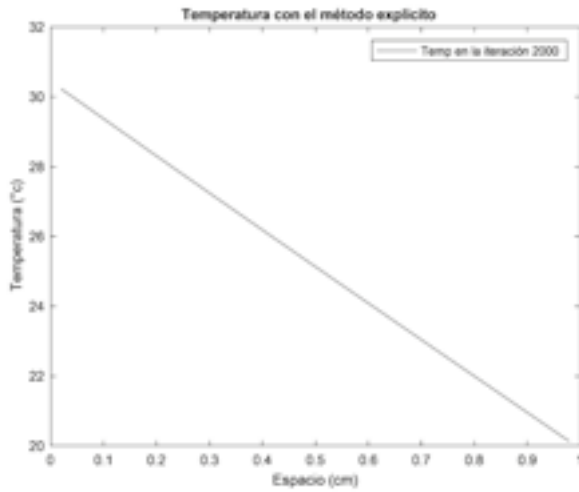


En la siguiente grafica, que muestra el comportamiento térmico en la iteración 500, el comportamiento lineal es mas evidente.

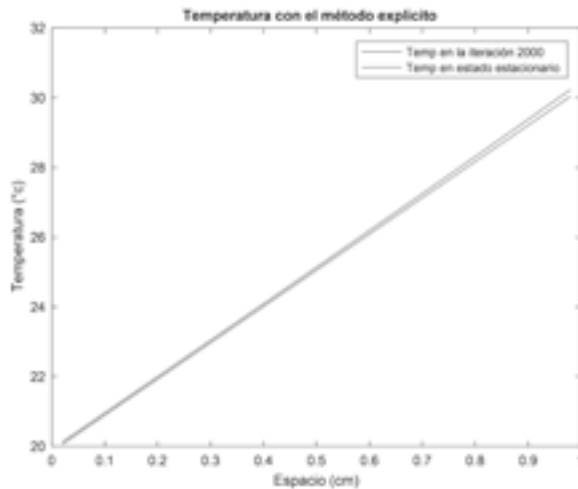


La siguiente gráfica muestra con claridad que la curva de temperatura es una función lineal. Lo cual demuestra que el modelo por el metodo numérico explícito converge a una función lineal en el estado estable.

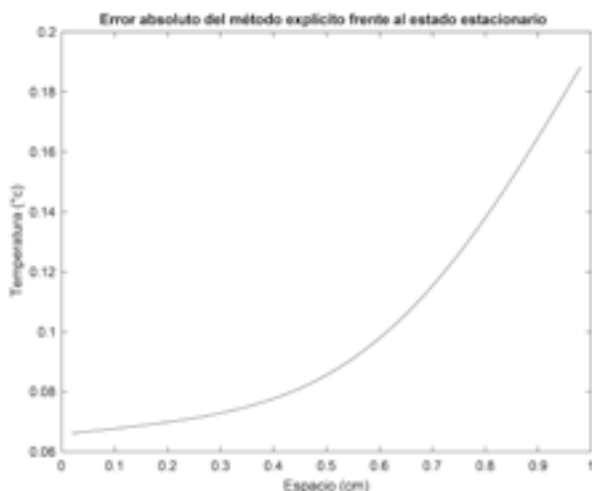
Del comportamiento de las curvas de temperatura en diferentes instantes podemos concluir que  $\lim_{t \rightarrow \infty} T(x, t) = f(x)$ , donde  $f(x) = (30.25 - 19.85)x + 19.85$ .



La siguiente gráfica compara los resultados numéricos del método explícito en la iteración 2000 en relación con la solución analítica de la sección 2.1.



La siguiente gráfica muestra el error del método explícito en comparación con el método analítico.



**b. Esquema implícito.**

Las relaciones recursivas se sintetizan en el siguiente sistema de ecuaciones. Para el caso  $n=3$ , las relaciones recursivas se reflejan en el siguiente sistema de ecuaciones:

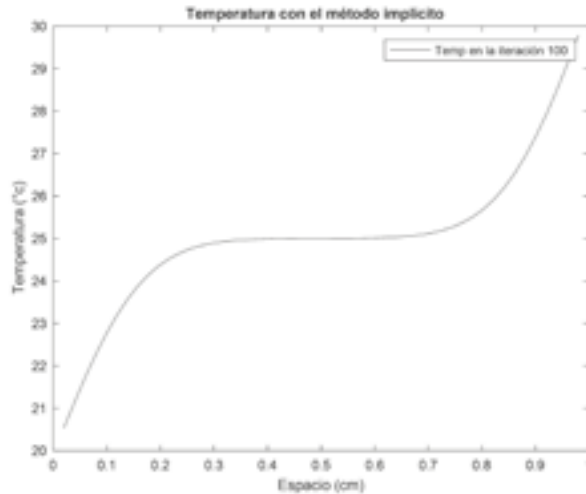
$$\begin{pmatrix} 1 + 2s & -s & 0 \\ -s & 1 + 2s & -s \\ 0 & -s & 1 + 2s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1^{k+1} \\ T_2^{k+1} \\ T_3^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sf(t_0) \\ 0 \\ sg(t_4) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T_1^k \\ T_2^k \\ T_3^k \end{pmatrix}$$

Los parámetros empleados en el diseño del código en Matlab fueron:

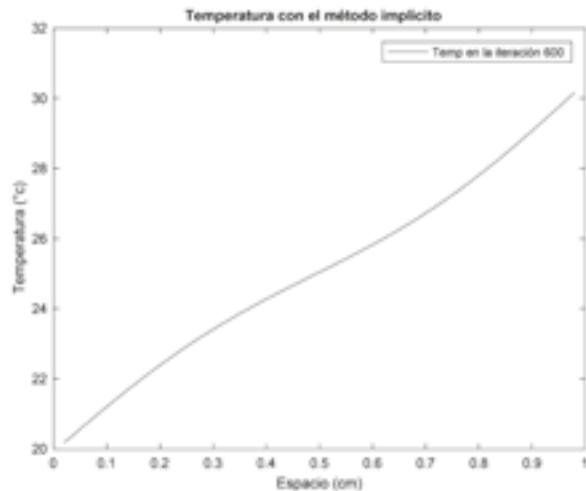
Parámetros	Datos
Ancho de la pared del horno	1 metro
Número de puntos en la dirección de x	2000
Paso en la dirección de x	1/50
Paso en la dirección de t	43200/2000
Constante de difusión térmica	0.000004
Parámetro de convergencia	0.2160
Temperatura en el interior del muro	25 grados

El análisis para el caso del método implícito es similar al caso explícito, esto es debido a la uniformidad del modelo. El siguiente conjunto de graficas muestran este comportamiento.

La siguiente gráfica nos muestra que la temperatura en el interior de la pared muestra la temperatura inicial de 25 grados, en los extremos tenemos las temperaturas dadas por las condiciones iniciales.

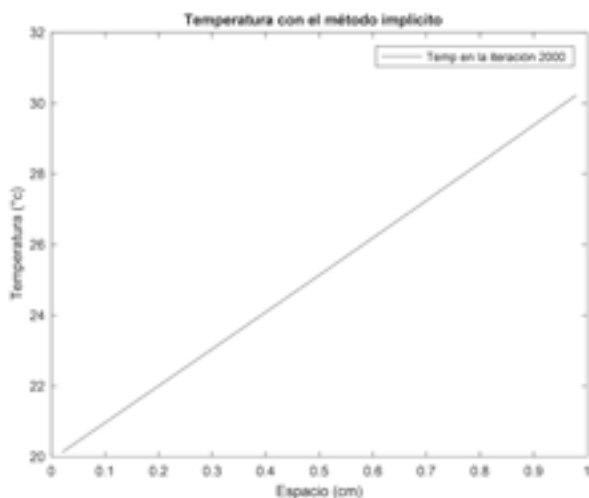


En la iteración temporal 600 la tendencia es hacia una función lineal.

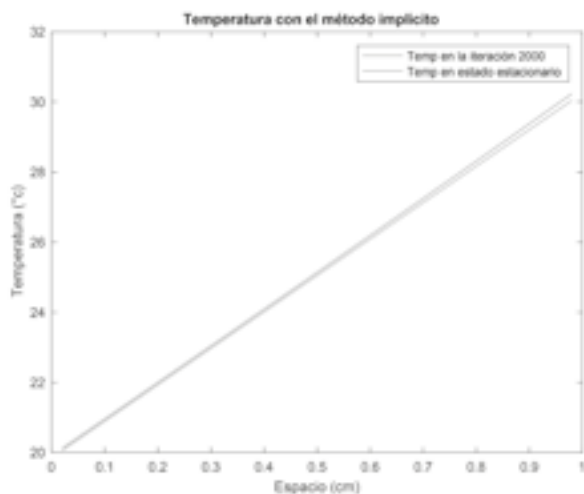


En esta gráfica observamos que la temperatura en la última iteración es claramente una función lineal.

Del comportamiento de las curvas de temperatura en diferentes instantes podemos concluir que  $\lim_{t \rightarrow \infty} T(x, t) = f(x)$ , donde  $f(x) = (30.25 - 19.85)x + 19.85$ .



Las siguiente gráfica muestra los resultados de comparar la función lineal  $f(x)$  con los resultados generados por el método implícito.



### 3.2. Modelamiento para el caso de la transferencia de térmica en dispositivos sin uso de electricidad.

Al aplicar el modelo numérico generado en la sección 2.2 a la ecuación del calor en coordenadas cilíndricas, se generaron los siguientes resultados para los métodos numéricos explícito e implícito.

**a. Esquema explícito.**

Las relaciones recursivas se sintetizan en el siguiente sistema de ecuaciones.

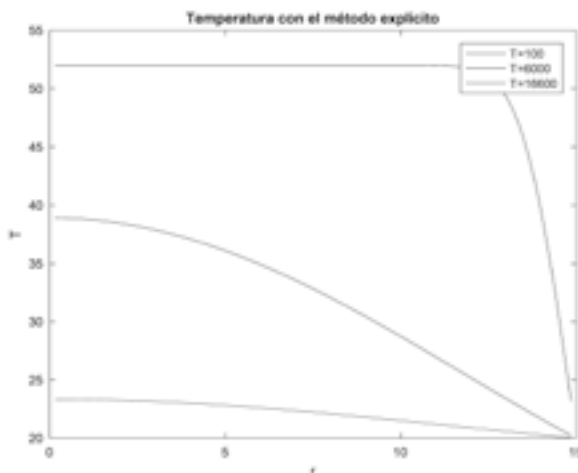
Para el caso  $n=3$ , las relaciones recursivas se reflejan en el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{s}{2j} - s & \frac{s}{2j} + s & 0 \\ s - \frac{s}{2j} & 1 - 2s & s + \frac{s}{2j} \\ 0 & s - \frac{s}{2j} & 1 - 2s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1^{k+1} \\ T_2^{k+1} \\ T_3^{k+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 20(\frac{s}{2j} + s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1^k \\ T_2^k \\ T_3^k \end{pmatrix}$$

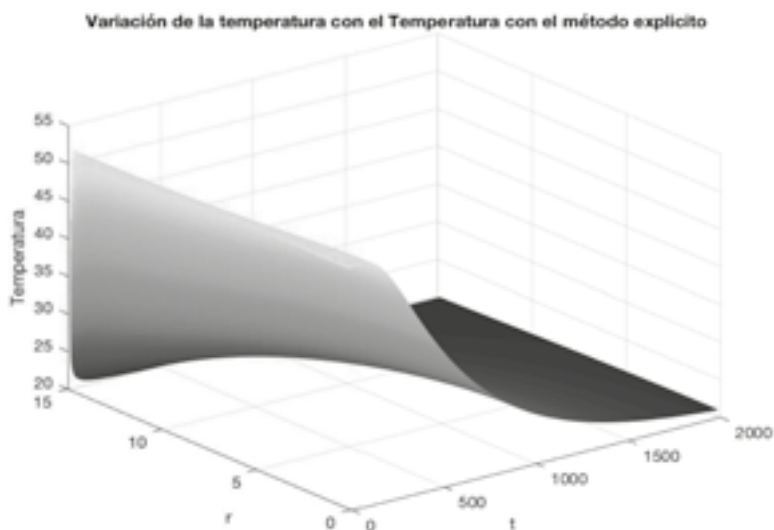
Los parámetros empleados en el diseño del código en Matlab fueron:

Parámetros	Datos
Radio del cilindro	15 mm
Número de puntos en la dirección de x	100
Paso en la dirección de x	15/100
Paso en la dirección de t	2000/25000
Constante de difusión térmica	0.08
Parámetro de convergencia	0.2902
Temperatura inicial del cilindro	52 grados centígrados
Temperatura del aire	20 grados centígrados

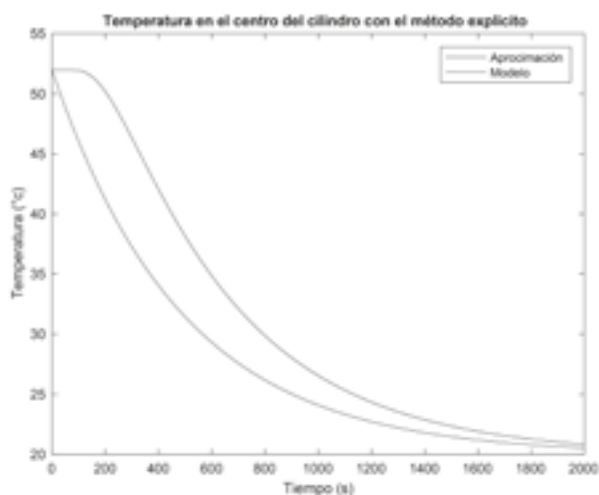
La evolución de la temperatura  $T(x,t)$ , para diferentes instantes se muestra en las siguientes gráficas:



Estas gráficas muestran las curvas de la temperatura para diferentes iteraciones temporales. Del comportamiento de las gráficas observamos que a medida que pasa el tiempo la temperatura del cilindro tiende a la temperatura ambiente de 20 grados.



Se puede determinar que la simulación numérica coincide con el modelo físico. La comparación del modelo teórico y la aproximación por el método explícito la observamos en la siguiente grafica.



**b. Esquema implícito.**

Las relaciones recursivas se sintetizan en el siguiente sistema de ecuaciones.

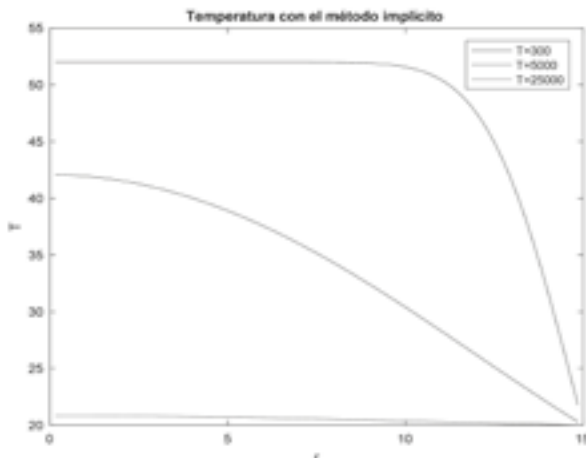
Para el caso  $n=3$ , las relaciones recursivas se reflejan en el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 1 + \frac{s}{2j} + s & -\frac{s}{2j} - s & 0 \\ -s + \frac{s}{2j} & 1 + 2s & -s - \frac{s}{2j} \\ 0 & -s - \frac{s}{2j} & 1 + 2s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1^k \\ T_2^k \\ T_3^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 20(-\frac{s}{2j} - s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1^{k+1} \\ T_2^{k+1} \\ T_3^{k+1} \end{pmatrix}$$

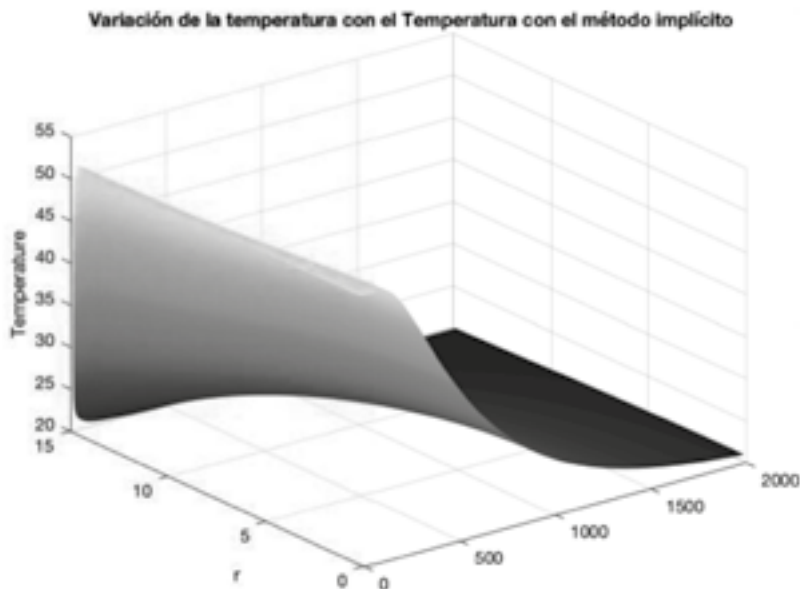
Los parámetros empleados en el diseño del código en Matlab fueron:

Parámetros	Datos
Radio del cilindro	15 mm
Número de puntos en la dirección de x	100
Paso en la dirección de x	15/100
Paso en la dirección de t	2000/25000
Constante de difusión térmica	0.08
Parámetro de convergencia	0.2902
Temperatura inicial del cilindro	52 grados centígrados
Temperatura del aire	20 grados centígrados

La evolución de la temperatura  $T(x,t)$ , para diferentes instantes se muestra en las siguientes gráficas:

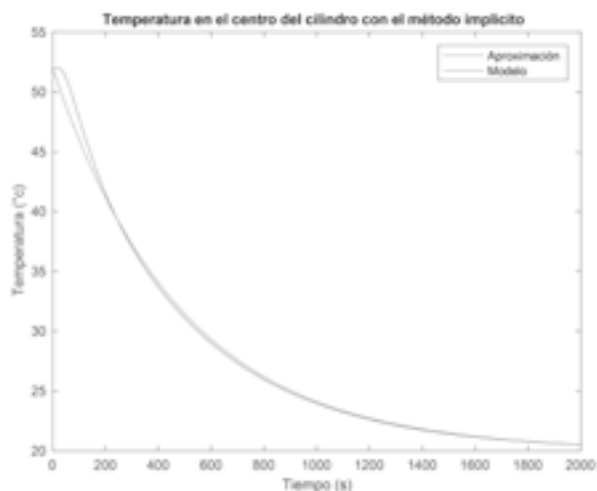


Como se observa, las curvas de la temperatura para diferentes iteraciones temporales. Del comportamiento de las gráficas observamos que a medida que pasa el tiempo la temperatura del cilindro tiende a la temperatura ambiente de 20 grados.



Comportamiento del perfil de temperatura a lo largo del proceso de transferencia de calor implementando el método implícito.

Al comparar el modelo teórico y la aproximación por el método explícito la observamos en la siguiente grafica.



Los dos métodos numéricos generan curvas de temperatura que se ajustan al modelo físico. En el caso del método implícito el error con respecto a la curva teórica es más pequeño. Por lo cual podemos concluir que el método implícito funciona muy bien para describir el cambio de temperatura en el centro del cilindro.