1.19

ALGUNOS FUNDAMENTOS PARA LA GEOMETRÍA COMO CIENCIA Y SU ENSEÑANZA

SOME FOUNDAMENTS FOR THE GEOMETRY LIKE SCIENCE AND THEIR TEACHING

Autor: Dr. C. Carlos Beltrán Pazo, Profesor Titular

Correo electrónico: carlosbp@cug.co.cu

Identificador ORCID: http://orcid.org/0000-0003-3804-4159

Institución: Universidad de Guantánamo

Localidad: Guantánamo, Cuba

Resumen

Que la geometría es una ciencia, no hay dudas. Es, además, una ciencia formal. Sin embargo, ¿cuánto de formalismo hay en ella y cuánto de formalismo exige el programa de esta disciplina en la formación del profesor de Matemática? Este trabajo aborda, desde una perspectiva argumentativa, algunas cuestiones que fundamentan la geometría que se estudia hoy. Su propósito, entonces estriba en determinar las posiciones teóricas sobre las que se debe sustentar la geometría como ciencia formal, pasando por el prisma de su adecuación para la enseñanza.

Palabras clave: Geometría; Sistema axiomático; Enseñanza de la geometría

Abstract

That the geometry is a science, there are not doubts. It is also, a formal science. However, how much of formalism there is in her and how much of formalism it does demand the program of this discipline in the formation of the Mathematics's teacher? This work approaches, from an argumentative perspective, some questions that they base the geometry that today is studied. Its purpose, then rests in determining the theoretical positions on those that should be sustained the geometry like formal science, going by the prism of its adaptation for the teaching.

Keywords: Geometry; Axiomatic system; Teaching of the geometry

Introducción

Enseñar geometría, con todos los retos que ello implica, se ha convertido en un desafío para los docentes de Matemática a todos los niveles. Como aprenderla, es el desafío mayor para cada estudiante. Y es que su formalismo y exigencia en los niveles de abstracción, son muy altos. Como ciencia formal, exige de un rigor que pocas áreas de la Matemática exigen, más si se pretende dar una visión axiomática de esta ciencia con los acomodos didácticos que necesita su enseñanza.

Modelos de enseñanza como los de Van Hiele, a partir de establecer niveles concretos de razonamiento, son factibles, si el docente comprende que cada nivel de enseñanza impone tareas concretas a superar y que no es posible pasar de un nivel a otro, sin resolver los desafíos del anterior. Comprender (y aprender) a resolver problemas de demostración o cálculo en la geometría, es una tarea esencial durante la enseñanza de la Matemática. Las técnicas y procedimientos que ofrece la geometría, son diferentes para cada situación concreta. Es por eso que se necesita, por parte de los docentes, incorporar nuevos enfoques en la enseñanza de la geometría. Resolver ejercicios tan cotidianos como la demostración de hecho de que los ángulos alternos internos formados al cortar una secante a dos rectas paralelas son iguales, no siempre es tarea fácil. Sin embargo, la escuela no exige que estos hechos se demuestren, quedando este resultado como una información valiosa a utilizar en la solución de ejercicios, sin mayores implicaciones que su aceptación como cierta a partir de su definición. Y, por regla general, se olvida que este hecho es demostrable, de manera muy simple, usando los axiomas de Hilbert, por ejemplo.

Este trabajo aborda, desde una perspectiva argumentativa, algunas cuestiones que fundamentan la geometría como ciencia formal y los fundamentos y necesidad de su estudio en la escuela. Su propósito, entonces estriba en determinar las posiciones teóricas sobre las que se debe sustentar la geometría como ciencia formal, pasando por el prisma de su adecuación para la enseñanza.

I. La geometría como ciencia formal

Es muy difícil aportar una definición formal de ciencias formales. Aquí solo se caracterizará. Las ciencias formales establecen el razonamiento lógico, se ajustan y trabajan con ideas creadas por la mente; su método de trabajo es la lógica deductiva. Un ejemplo es la geometría, a partir de la implementación en ella del método axiomático para su construcción.

Los dos modos de demostración más frecuentes usados por las ciencias son la inducción y la deducción, este último es el modo que usan de manera casi exclusiva las ciencias formales. La deducción es un proceso de razonamiento que va de unas premisas generales a una conclusión particular.

Para los efectos de este trabajo, se entenderá por demostración como una prueba lógica, nunca empírica, de una proposición. En geometría, como en cualquier área de la matemática, la verdad de las proposiciones tampoco se demuestra experimentalmente. En este caso, una prueba lógica es un "señalamiento" de las implicancias entre un conjunto de proposiciones llamadas "axiomas" y otras proposiciones llamadas "teoremas" que deben demostrarse.

El ideal metodológico de la geometría, como ciencia formal, se basa en constituirse en un sistema axiomático, que está compuesto de los siguientes elementos:

1. La exposición contiene un sistema de términos propios del lenguaje de esta ciencia: elementos, relaciones entre elementos y operaciones a realizarse con los elementos. Estos, con toda intención, se eligen como términos no definidos. Estos son los *Elementos*, las *Relaciones* y las *Operaciones Primitivas* del discurso, y todas ellas se engloban bajo el nombre de *Conceptos*

Primitivos.

2. Todos los demás términos y sus relaciones se tienen que definir explícitamente por medio de los conceptos primitivos y las relaciones entre ellos.
3. Esta exposición es contentiva, además, de otros enunciados relacionados con los conceptos primitivos que a propósito se eligen sin demostración. Estos se llaman *Axiomas*.
4. Todos los demás enunciados, relacionados tanto con los términos primitivos como con los nuevos conceptos y relaciones definidos, se deducen lógicamente de los axiomas. Estos son los llamados *Teoremas*.

El prototipo de esta exposición axiomática son los Elementos de Euclides. En los Elementos, la geometría, hasta entonces un conjunto de reglas, casi siempre empíricas, para medir o dividir figuras, se convierte en ciencia deductiva. Esta es una de las formas en que el conocimiento empírico pasa a ser conocimiento formal y, en la geometría, así sucedió esta primera vez, nunca antes de Euclides.

Para Euclides los axiomas tienen un carácter general, mientras que los postulados son considerados como los puntos de partida específicos de cada ciencia. Ambos son considerados verdades evidentes que no tienen necesidad de demostración. Sin embargo, no hay claridad en la respuesta a la pregunta: ¿Qué se entiende hoy por verdad evidente? Al leer los Elementos, pareciera ser que para Euclides esas verdades, las entendía como “enunciados verificables”. Hoy en la geometría no se puede hablar de ellas, sino de “verdades lógicas”. Solo se señala al respecto que son enunciados tautológicos, es decir, necesariamente verdaderos, mientras que los enunciados empíricos, que son los llamados verificables, serán eventualmente considerados como verdaderos. En estos términos, su verdad deriva de su verificación.

En los tiempos de Euclides se hablaba de verdad evidente, bajo el entendido de que se está diciendo que cualquier persona puede ver la verdad de sus enunciados. Sin embargo, el concepto “evidente” es muy relativo: lo que es evidente para un sujeto, puede no serlo para otro, y viceversa. Pero siendo así, el subjetivismo que sí es evidente en estos casos, al menos pone en dudas la concepción de verdad evidente.

Tómese, por ejemplo, el V postulado de Euclides, enunciado en su forma original: Postúlese... *Y que, si una recta al incidir sobre dos rectas hace los ángulos internos del mismo lado menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán en el lado en el que están los menores que dos rectos.*

Al leerlo tal y como lo escribió Euclides y dentro de su contexto, se observa que el V postulado es mucho más complicado en su formulación que los otros cuatro. ¿Es evidente? No tanto. Euclides mismo no se sirve de él en sus primeras 27 proposiciones, como si intuyera la problemática de fondo. Pero, ¿es realmente el V postulado independiente de los otros cuatro, o bien puede deducirse de ellos? Precisamente lo complicado del mismo hizo pensar a muchos matemáticos que se trataba de un teorema, por lo que se realizaron numerosos intentos, infructuosos, para demostrarlo. Justamente estos esfuerzos, como desembocaron en las geometrías no euclídeas.

Euclides ya no es la última palabra en geometría, puesto que se pueden construir nuevos sistemas geométricos empleando axiomas distintos, e incluso, incompatibles con los suyos. La convicción de que los axiomas pueden establecerse en virtud de su autoevidencia no tiene, hoy, ningún fundamento serio.

II. Muchas geometrías

Y bien, como se observa del apartado anterior, en la geometría también hubo sus crisis, y de hecho salidas de estas que aportaron nuevos conocimientos a la ciencia geometría y también nuevas geometrías a la ciencia. Hoy, en la geometría como sistema formal, los axiomas no tienen características de auto-evidentes, son simplemente premisas, puntos de partida para el desarrollo de resultados posteriores. En este sentido, de las proposiciones que se concluyen de los axiomas por medio de reglas lógicas, diremos que son formalmente válidas, es decir, que existe una filiación lógica entre los axiomas y dichas conclusiones.

El mérito esencial de Euclides consistió en que sistematizó y axiomatizó los conocimientos geométricos más importantes de su tiempo, dándoles un carácter formal, bajo el supuesto de que su geometría reflejaba las propiedades del mundo real.

Definió conceptos como “punto”, “recta” y “plano” para, a continuación, enunciar los “axiomas” que relacionaban estos conceptos. Todo aquel que entendiese, por “punto” y por “recta”, lo mismo que Euclides parecía razonable que aceptase como verdadero el axioma de que “por dos puntos pasa una única recta”. Los axiomas de Euclides pretendían describir las propiedades del espacio de una forma “evidente” y sistemática. El éxito de Euclides fue tal, que su libro, “Elementos”, fue un paradigma de modelo de conocimiento.

El método axiomático, en la Matemática, surgió alrededor del siglo V a. n. e. con un carácter muy constructivo y material. Posteriormente, a comienzos del siglo XIX los estudios sobre los fundamentos de la Geometría Euclidiana motivaron un cambio en las consideraciones del método y ya a fines del siglo XIX los trabajos de David Hilbert y su escuela formalista lograron un alto nivel de efectividad y rigor en su utilización.

Es decir, el método axiomático en la geometría pasó en su desarrollo por tres períodos:

El primero, llamado período de la axiomatización material o constructiva, que se extiende desde el período de establecimiento de la matemática como ciencia en la antigua Grecia (siglo V – IV a. n. e.) hasta el siglo XIX. En todo este período se entendía como axioma toda proposición matemática perfectamente evidente, intuitivamente clara para todos, y, por tanto, no necesaria de demostración.

El segundo período es el de la axiomatización semiformal, comprendido desde la formación de las primeras geometrías no – euclideanas a comienzos del siglo XIX, hasta que a finales del mismo siglo David Hilbert promueve las consideraciones más rigurosas de su programa. En esta etapa los axiomas se trataban como proposiciones de la teoría, las cuales, en una construcción dada, se toman como puntos de partida, independientemente de que ellos sean simples, evidentes o intuitivamente claros para todos, perdiendo así su carácter de verdades absolutas.

Y el tercer período, denominado el de la axiomatización formal, que está relacionado con el programa formalista de fundamentación de la matemática, desarrollado por David Hilbert y su escuela, a partir de la última década del siglo XIX. El concepto de axioma posee un riguroso carácter formal, es decir, en el cálculo formal, los axiomas ya no constituyen proposiciones primarias de una teoría científica concreta, sino un determinado conjunto de fórmulas no demostrables de la teoría.

En la época actual se ha logrado realizar un riguroso análisis lógico de los sistemas de axiomas, precisándose las reglas de inferencia y las reglas fundamentales de la construcción de tales sistemas, es por ello que el método axiomático es uno de los métodos científicos generales más extendidos en el conocimiento y sobre todo para la estructuración deductiva del saber ya obtenido.

En 1889, Hilbert publica su obra (Fundamentos de la Geometría. Pretendió con eso, y lo logró, sustituir los clásicos axiomas de Euclides, a partir de axiomatizar la geometría euclídea reduciendo al máximo los elementos básicos necesarios (conceptos primitivos) para su construcción y demostrando la consistencia e independencia de los axiomas empleados. Así presenta los 21 axiomas expuestos en cinco grupos:

Grupo 1: Axiomas de enlace (más comúnmente, axiomas de pertenencia),

Grupo 2: Axiomas de ordenación (más comúnmente, axiomas de orden),

Grupo 3: Axiomas de congruencia,

Grupo 4: Axioma de las paralelas y

Grupo 5: Axiomas de continuidad.

Es interesante que no se pretende declarar de antemano la verdad de los axiomas propuestos, ni se pretende tampoco un apoyo en intuiciones que permita la reconstrucción de la geometría. Los axiomas explican las relaciones mutuas entre los conceptos básicos, que son llamados por Hilbert punto, recta, plano y las relaciones entre ellos se designan por: está entre, es congruente con e incide. Como puede observar, los términos empleados son los clásicos, en esta construcción semiformal, lo que se exige es que se abstengan estricta y explícitamente a lo que se dice de ellos y no emplear el significado intuitivo que se les atribuye en la geometría de Euclides. En definitiva, Hilbert evita las debilidades identificadas en la construcción de Euclides, cuyos trabajos seguían siendo usados como libro de texto en aquel momento. El enfoque de Hilbert marcó el cambio al sistema axiomático moderno. Los axiomas no se toman como verdades evidentes. La geometría puede tratar de cosas, sobre las que tenemos intuiciones poderosas, pero no es necesario asignar un significado explícito a los conceptos indefinidos. Como dice Hilbert, los elementos tales como el punto, la recta, el plano y otros, se pueden sustituir con mesas, sillas y otros objetos. Lo que se discute son sus relaciones definidas. Los axiomas unifican la geometría plana y la sólida de Euclides en un único sistema.

Para Frege los axiomas son enunciados cuya verdad es dada inmediata, desde la intuición. Para Hilbert "si los axiomas dados arbitrariamente no se contradicen entre sí, entonces son verdaderos y las cosas definidas por los axiomas existen. Este es para mí el criterio de verdad y existencia"[7] (Frege, 1980, p. 40)

III. Los sistemas axiomáticos y los modelos

En este apartado se centrará la atención en mostrar cómo se estudian las tres propiedades más importantes de los sistemas axiomáticos: la consistencia, la independencia y la completitud, aunque en lo que respecta a la tercera propiedad, se dará solamente la definición y un criterio, que deben de cumplir los sistemas para tener dicha propiedad.

Todas estas propiedades serán analizadas por medio de otro concepto: el concepto de Modelo, muy ligado con los sistemas. Para ello deben considerarse tres elementos esenciales:

1. Una interpretación de un sistema axiomático, es una asignación de significados a los términos primitivos del sistema, de tal modo que los axiomas se convierten en proposiciones (es decir, en verdaderos o falsos).
2. Una interpretación que hace verdadero un postulado, diremos que Satisface tal postulado.
3. Una interpretación la cual satisface todos los postulados de un sistema axiomático, diremos que es un Modelo para el conjunto de postulados, o para el sistema.

Es claro que no cualquier interpretación es un modelo, e igualmente claro, es que un sistema axiomático podría tener ninguno, uno o varios modelos.

Debido a que, los teoremas son deducidos a partir de los postulados, por (F), y los métodos de demostración están basados en leyes lógicas, no es posible que enunciados verdaderos, en un modelo dado, impliquen enunciados falsos, entonces un modelo satisface los teoremas de un sistema

[7] Fragmento de una carta de Hilbert a Frege en la mencionada polémica sobre la naturaleza de los conceptos básicos. Fue publicada por Frege en 1980.

axiomático.

Sea el sistema axiomático ***SA_1***, en el que los conceptos básicos son: los elementos: ***puntos y rectas, l***a relación entre elementos: ***sobre*** y el conjunto de axiomas es el siguiente:

A_1. Existe al menos una recta.

A_2. Si l es una recta, entonces existen al menos tres puntos sobre l.

A_3. Si l es una recta, entonces existe un punto P que no está sobre l.

A_4. Si P y Q son dos puntos cualesquiera, entonces existe solo una recta que pasa por P y Q.

Nótese que se ha usado un sinónimo para la relación sobre: Si un punto P está sobre una recta l, entonces diremos indistintamente: l pasa a través de P, l pasa por P, l contiene a P, P es un elemento de l, entre otros.

A5. Si l y m son dos rectas, entonces existe al menos un punto P el cual está contenido en las dos, en l y m.

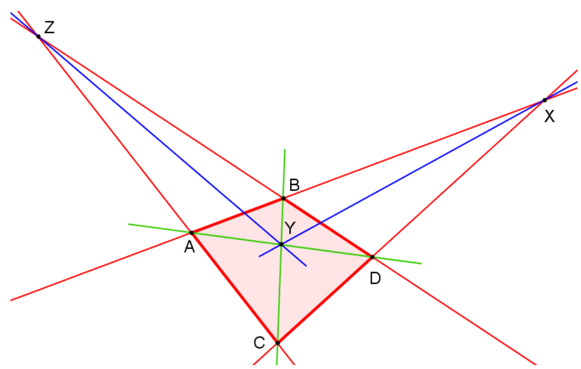
Obsérvese este modelo que ilustra la consistencia de este sistema. Considérense las ternas de letras: {A, B, X}, {A, C, Z}, {A, D, Y}, {B, C, Y}, {B, D, Z}, {C, D, X} y {X, Y, Z}.

Sea entonces, la siguiente interpretación:

1. Se entenderá por punto cualquiera de las letras A, B, C, D, X, Y, Z;
2. Se entenderá por recta a cualquiera de las ternas mencionadas;
3. Se interpretará la relación sobre por pertenecer.

Esta interpretación así dada, es un modelo para el sistema de axiomas dado.

Observe la siguiente figura, donde se muestra un cuadrángulo. En ella, el cuadrángulo completo ABCD, con sus tres puntos diagonales, X, Y, Z, las seis rectas determinadas por los vértices y otra recta que es la que une los puntos diagonales.



Es posible que el modelo referenciado más que ayudarlo, lo haya confundido. Eso es normal. Por ejemplo, ¿cómo "leer" la recta XYZ? Y es que, al hablar de rectas, en el cerebro de un lector no entrenado, intuitivamente se representa la recta que comúnmente conoce como la recta euclidiana. Considere lo expuesto arriba acerca de que, por conceptos primitivos o básicos, puede interpretarse literalmente cualquier cosa. Y como se puede comprobar, cada uno de los axiomas son comprobables en este modelo.

Entre paréntesis, el hecho de que esto último sea de esta manera, o sea que, por punto, por ejemplo, se pueda interpretar cualquier cosa, despoja a la geometría de su carácter realista, de ser el reflejo de la realidad, acentuando su carácter abstracto cuando se construye formalmente. Una manera de modelar los 8 axiomas de incidencia de Hilbert, es a partir de observar un tetraedro como modelo de este subsistema de axiomas.

Aquí deben hacerse las siguientes consideraciones:

1. Interprétese ***punto*** por ***vértice***.
2. Interprétese ***recta*** por ***lado***.
3. Interprétese ***plano*** por ***cara***.
4. Interprétese ***pertenece*** por ***pertenece*** o ***pasa***.

Siendo así, es fácil verificar. Como se hace en la siguiente tabla, que los 8 axiomas de incidencia de Hilbert se cumplen.

Elementos básicos:	**Vértice (Punto), Lado (Recta), Cara (Plano) y Pasa**
	Axiomas de pertenencia
I.1.	Por cualquier par de vértices pasa un lado.
I.2.	El lado que pasa por cualquier par de vértices es único.
I.3.	En cada lado hay al menos dos vértices. Hay al menos tres vértices que no están
I.4.	Para cualquiera sean tres vértices, existe una cara. En cada cara hay al menos
I.5.	Para cualquiera sean tres vértices, existe una cara única. En cada cara hay al
I.6.	Si dos vértices pertenecen a una cara, entonces el lado entero pertenece a esa
I.7.	Si cualquiera de las caras tiene un vértice común con otra cara, tiene un lado
I.8.	Existen al menos 4 vértices que no pertenecen a una cara.

Un Sistema Axiomático, o un subsistema de un sistema, tiene que ser consistente. Esto ocurre cuando no existen dentro del sistema, dos axiomas o un teorema y un axioma ó dos teoremas que se contradigan. Una definición equivalente, es que dos enunciados contradictorios, no puedan ser deducidos lógicamente de los postulados.

Se insiste en que esta propiedad no solo es deseable es que es absolutamente necesario para un Sistema Axiomático el ser consistente, sin esta propiedad el sistema no tiene sentido, y, por ende, sería innecesario considerar cualquier otra propiedad.

Surge inmediatamente la pregunta ¿Cómo podemos saber que un Sistema Axiomático es o no consistente? De la definición deducimos que tendríamos que probar que es imposible que un teorema o un axioma, contradiga a otro teorema o a un axioma.

Si de alguna forma se supiera que de un conjunto de axiomas se han deducido todos los teoremas, podríamos verificar a pie la no-contrariedad, pero a pesar de esto, podría ocurrir que la lista fuera tan grande o que los teoremas fueran tan complejos y sutiles, que una contradicción, podría permanecer entre ellos. Por otro lado ¿Cómo se probaría o cómo se sabría que todos los teoremas

están en la lista?
En la mayoría de los Sistemas, al menos los de mayor interés, el conjunto de teoremas no está completamente determinado y de aquí que no exista garantía alguna de que, si hasta cierto momento no se ha encontrado una contradicción, más adelante no se halle.
¿Qué hacer entonces? Existen métodos indirectos para probar la consistencia de un Sistema Axiomático. El método de más éxito hasta ahora inventado es el de modelos. ¿Podría existir un Sistema Axiomático que tuviera un modelo y ser al mismo tiempo inconsistente? La respuesta es NO. Ya que si un sistema fuera inconsistente existirán dos enunciados contradictorios, por ejemplo, SI y No-SI, los cuales serían satisfechos por el modelo, es decir, serían los dos al mismo tiempo verdaderos lo cual es imposible.
¿Qué le ocurriría al sistema si en efecto un axioma fuera un teorema? Si esto ocurriera el problema no es grave, lo peor que puede ocurrir es que no encontremos la prueba de tal *axioma* y lo que podemos hacer es dejarlo en la lista de postulados. En caso contrario, es decir que encontráramos una demostración, bastaría quitarlo de la lista.
Entonces, es conveniente formalizar esta propiedad.
La **independencia** de un sistema axiomático es deseable, pero no imprescindible. Esta característica se refiere a que el sistema axiomático no admite la eliminación de ninguno de los axiomas conservando el mismo conjunto de consecuencias. Ahora bien, es evidente que no solo se debe aplicar esta mejora en la docencia, existen muchas otras herramientas útiles en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

III. La geometría en el nivel medio de enseñanza de la Matemática

Es importante, por último, entender y responder la siguiente interrogante: ¿Deben aparecer los fundamentos de la geometría en el nivel medio de enseñanza de la Matemática?
Como se ha podido leer arriba, los Fundamentos de la Geometría se basan en la definición de un grupo de elementos que se denominan primitivos, un sistema de axiomas que describen las relaciones entre ellos y con los que se construyen y demuestran todos los conceptos geométricos a partir de ahí. Su mayor valor, se centra en ser sólido en sus bases. Sin embargo, es lento y a veces complicado en su desarrollo, pues exige, verdaderamente y si se quiere ser consecuente con su aplicación, que todas las definiciones y los teoremas que se derivan de su sistema axiomático, sean deducidos del mismo, sin otras contaminaciones. A esto se suma el hecho de las complicaciones didácticas para trasmitir al alumno de secundaria la necesidad de fundamentar razonamientos que para él son evidentes por intuición o por la observación directa en un dibujo, por ejemplo.
Entonces, este estudio se debe hacer, y se hace, a nivel de la enseñanza de la disciplina geometría en la formación de profesores de matemática en el Segundo año de la carrera. Y para estos

estudiantes, es difícil de asimilar esta construcción de la geometría, entonces para el nivel de educación secundaria básica. No se puede o al menos sería muy parcializado y truncado, impidiendo así ser estricto con tal construcción. La geometría, a partir de su enseñanza en la escuela, debe garantizar un tipo de pensamiento estructurado que le permita al estudiante de secundaria básica, ubicarse espacialmente. Esto último se refiere, básicamente a la manera en que un individuo percibe y organiza el espacio que lo rodea para estudiarla y transformarla. Esto implica que los alumnos:

- Comprendan que, bajo determinadas condiciones, resultados propios de la geometría axiomática resuelven problemas considerados muy difíciles con el enfoque analítico, o por lo menos, pueden simplificarse considerablemente.
- Aprendan a razonar geométricamente, lo que les facilitaría modelar los objetos geométricos a partir del papel, lápiz, regla, compás.
- Se hagan a la idea de que un resultado o argumento de geometría axiomática ofrece una mayor comprensión geométrica que ayuda a entender el espacio tridimensional.
- Entiendan que problemas comunes o resultados ya establecidos en la geometría escolar, son deducibles de manera muy simple, con argumentos de la geometría axiomática. Un ejemplo simple se da en el siguiente ejercicio: demuestre que si una recta corta a una de dos paralelas, entonces, corta a la otra. Este es un ejercicio “evidente”, por intuición y aprendido por su uso frecuente como evidente. Sin embargo, demostrable desde la geometría axiomática de forma breve (y necesaria).

Sí se coincide en que es necesario introducir en secundaria determinado nivel de rigor en las explicaciones, demostraciones y justificaciones geométricas. Pero esto no implica la explicación a los alumnos de qué es un sistema axiomático formal ni sus implicaciones y deducciones rigurosas. No obstante, es una necesidad, por asunto de elevar el rigor deductivo de la geometría y evitar, lo más posible, su enseñanza intuitiva, introducir ciertos puntos de partida como los establecidos por Hilbert. La ausencia de estas cuestiones en la enseñanza de la geometría, para este autor, implicaría una falta de rigor que pondría en dudas el carácter deductivo-inductivo de una clase de Matemática.

Sin tratar de ser absolutista ni empoderar una ciencia sobre otra, la matemática y, por ende, su enseñanza, a diferencia de otras ciencias, necesita desarrollar en los alumnos, competencias para demostrar resultados matemáticos con herramientas matemáticas. Esto hace que aprender a demostrar haya sido siempre, uno de los principales objetivos de la enseñanza de la matemática a todos los niveles de enseñanza.

Los llamados perfeccionamientos educativos en Cuba, no han resuelto el hecho de especificar la necesidad de la demostración matemática, y la geométrica. Los textos son más gruesos, pero las demostraciones matemáticas más exiguas y menos exigidas aún. Y se han tenido, muchas veces, sin el consenso generalizado de los docentes de Matemática en la escuela cubana (esto se deja a un determinado grupo de docentes, todos cualificados, pero no siempre vinculados a la docencia en la escuela media de esta ciencia en la llamada Subcomisión Nacional de Matemática del Ministerio de Educación), posturas extremas, tanto a favor como en contra de la demostración en la enseñanza de la Matemática.

Sin embargo, hoy existe consenso internacional entre profesores de matemática sobre la necesidad de que los estudiantes terminen la enseñanza básica con la comprensión teórica y práctica de la importancia y la necesidad de la demostración en matemática. Esto implica consenso en la importancia y la necesidad de desarrollar en los estudiantes un pensamiento deductivo, dejando el aprendizaje de la demostración formal para el bachillerato y la universidad.

Se hace necesario entonces ahondar en las estrategias para lograr que los alumnos de la enseñanza media practiquen y entiendan la matemática y, especialmente el razonamiento deductivo matemático como una herramienta de razonamiento deductivo, útil para el logro de tal pensamiento.

En efecto, demostrar en la ciencia historia, no es lo mismo que demostrar en la ciencia matemática. Aún cuando se comprende que una demostración es una secuencia de argumentos en ambas ciencias, los argumentos deductivos que deben se expresan mediante el lenguaje de la matemática, hacen que las diferencias en el desarrollo de la habilidad demostrar en ambas ciencias, sea diferente. Ejemplos pueden citarse muchos, pero desbordan las intenciones de este artículo.

Del mismo modo es un hecho que en el lenguaje que usa la matemática, como en cualquier otro lenguaje, las formas de expresión son de una importancia capital. Es por ello que una de las tareas más importantes del profesor de Matemática a nivel de Secundaria Básica es el prestar la debida atención a que los estudiantes se expresen con la corrección adecuada a sus posibilidades y estilos reales de aprendizaje. Sin embargo, debe observarse con celo profesional que no se rompa el equilibrio debido entre intuición y el carácter formal de la matemática, en particular, el carácter deductivo de la geometría. Esta tarea se traduce en mantener el adecuado equilibrio entre permitir a sus alumnos usar un vocabulario intuitivo, que les resulta más fácil y próximo, y el progresivo aprendizaje de los términos matemáticos correctos, parta su aplicación en tareas que exigen de la deducción.

Hoy, también es una realidad palpable de la praxis cuando se enseña geometría a todos los niveles educativos, incluyendo el nivel superior, la omisión de temas o contenidos de enseñanza “engorrosos” para que los estudiantes los asimilen. Sirva de ejemplo, lo siguiente. Ante la incomprensión por parte del profesor de los elementos antes mencionados, en la Educación Superior, donde se deben ofrecer al futuro profesor de Matemática las herramientas que aporta la geometría construida de manera axiomática, se procede al tratamiento de la Geometría escolar desde lo operativo de los temas abordados, propiciando así, le tendencia a la ejecución, sin aportar a la tendencia a la deducción, que se exige en los programas de geometría en este nivel de enseñanza.

El profesor Van Hiele ofrece u modelo de aprendizaje de la geometría estructurado en cinco niveles, todos a tener en cuenta, si se quiere apartarse de la enseñanza mecánica de la geometría, ausente de la mencionada tendencia a la ejecución. Estos cinco niveles de razonamiento son los siguientes: reconocimiento o visualización, análisis, ordenación o clasificación, deducción formal y rigor.

La diferencia entre estos niveles se manifiesta en el grado de abstracción que requieren los razonamientos a él asociados. El nivel superior se refiere al quinto nivel y cada nivel superior exige un razonamiento deductivo más complejo que el anterior. De esta forma, pasar de un nivel inferior a otro, exige el vencimiento de las competencias normadas en el nivel inmediato inferior y por ende, mientras no se produzcan aprendizajes propios de un nivel, no pueden adquirirse los aprendizajes del siguiente. Los aprendizajes asociados a cada nivel, expresados en conceptos, procedimientos y consecuente desarrollo de un lenguaje específico, entre otros, sientan las bases para la formación y desarrollo de las competencias que mejoran el pensamiento deductivo del estudiante y que permiten aprendizajes más complejos y significativos del siguiente nivel. Estos niveles son:

Reconocimiento: El razonamiento es visual y físico, básicamente intuitivo. Los elementos o partes de una figura geométrica que se identifican, lado de un polígono, por ejemplo, no tienen necesariamente un carácter de ente matemático, sino que se perciben únicamente como elementos observables. En este nivel, el razonamiento de los alumnos es básicamente descriptivo de lo que observa en las figuras u objetos geométricos. En consecuencia, en este nivel los estudiantes no desarrollan razonamientos matemáticos, ni se les puede exigir todavía realizar demostraciones, pero aún así, es una necesidad que expliquen sus respuestas que ofrecen.

Análisis: Justamente en este nivel, comienzan los primeros pasos para el inicio del razonamiento matemático y con este, el pensamiento deductivo geométrico. Ahora las figuras geométricas, sus elementos y sus propiedades ya poseen un carácter matemático. Aún los razonamientos de los estudiantes son inductivos, al basarse en la observación o manipulación de entes concretos y a partir de los cuales, se generalizan propiedades matemáticas de estos entes. También la demostración de propiedades observables de manera intuitiva posee un carácter empírico. Esto implica entender, por parte del estudiante y del profesor, que no se está en presencia de demostraciones verdaderas sino de comprobaciones de que la conjetura se verifica en una cantidad pequeña (observable aún), de ejemplos.

Clasificación: Se inicia el razonamiento matemático lógico-deductivo. Los estudiantes de este nivel aprenden a diferenciar los elementos de un enunciado (hipótesis y tesis). En esto ayuda el aprender por parte del estudiante y el exigir, por parte del profesor, de la escritura de los teoremas o ejercicios de demostración, en la forma Si…, entonces… Ya se entiende en este nivel el concepto de dependencia lógica de una propiedad respecto de otra. Se debe notar, y trabajar en esta dirección para su corrección permanente, que todavía sus razonamientos y demostraciones, aunque deductivos, tienen un carácter informal. Esto es deducible en la dependencia, aún latente, en su necesidad de apoyarse en la manipulación de un ente o ejemplo concreto que lo guía en la creación de la demostración y en su incapacidad para escribir demostraciones formales y usar la simbología matemática formal.

Deducción formal: Es en este nivel de razonamiento donde se comprende la ventaja y la importancia del razonamiento lógico-deductivo formal sobre las formas de razonamiento típicas de los niveles anteriores. La geometría aquí, juega un papel determinante, dado su contenido tan abstracto. Entonces aquí ya los estudiantes pueden entender la estructura de un sistema axiomático y el papel de cada elemento (términos primitivos, axiomas, definiciones, teoremas). De igual manera son capaces de realizar razonamientos totalmente abstractos, desligados de ayuda concreta o referencia a la realidad y basados sólo en la manipulación de las definiciones o teoremas aceptados de acuerdo con las reglas de la lógica formal, así como de escribir demostraciones formales.

Rigor: Este es el nivel máximo de abstracción en el razonamiento geométrico. La diferencia más marcada respecto al nivel anterior se manifiesta en la formación y desarrollo de competencias para trabajar en sistemas axiomáticos diferentes (geométrico como el de Hilbert, aunque no se le enuncie como tal, o aritmético, como el de Peano para la formación de los números naturales, aunque tampoco se de en el nivel de secundaria Básica con el rigor y la formalidad que se debe exigir en el nivel superior). Por otra parte, esta diferencia debe ser observada a partir de la comprensión del hecho indiscutible de que la verdad o falsedad de una proposición matemática no es absoluta, sino que depende de la visión amplia o estrecha sobre la realidad y las relaciones matemática-realidad que posean tanto el profesor como el alumno. Conlleva también aceptar como ciertas, demostraciones contrarias a la intuición y sentido común, si el argumento es válido.

En el nivel superior, el estudiante es capaz de comprender las propiedades de que puede gozar un sistema deductivo, como la consistencia, la independencia y la completitud de los postulados y sus implicaciones para deducir nuevas propiedades a partir de sus axiomas. Incluso, este nivel permite a los estudiantes la comprensión clara de la existencia de otras y nuevas geometrías

Conclusiones

1. Si bien es una necesidad la formalización de la geometría y el desarrollo del pensamiento deductivo de los estudiantes durante el estudio de esta ciencia en la escuela, no es posible, en el marco de este nivel de enseñanza, enseñar a deducir todo lo que se debe deducir en geometría. Por tanto, no debe considerarse este asunto como una aspiración inmediata, lograble sólo en determinados estudiantes de la educación Superior.
2. El modelo de Van Hiele ofrece una alternativa de estructuración de la enseñanza de la geometría a lo largo de la vida escolar del estudiante a partir de niveles, logrables en la misma medida que se verifiquen desde los primeros estadios de enseñanza de esta ciencia.
3. Una idea aceptable, en las condiciones de la educación hoy, puede ser un objetivo razonable de aprendizaje es que los estudiantes inicien la adquisición del segundo nivel de razonamiento al comienzo del segundo ciclo de Primaria, que debe ser continuado en los niveles de secundaria básica y Preuniversitario con los niveles 2 y 3 y los de niveles superiores, como la formación de profesores de matemática, iniciar la toma de contacto con el cuarto o quinto (en dependencia de las posibilidades reales de cada estudiante), niveles de razonamiento.

Referencias bibliográficas

Fernández Bravo, J. A. (2013). *Desarrollo del pensamiento lógico y matemático.* Madrid: Mayéutica.

Ferre, N. (2018). *Álgebra y Geometría: una manera de pensar.* En Natalia Ferre; Adriana Claudia Galli; Elena Beatriz Guzmán Mattje. - 1a ed. - La Plata: Universidad Nacional de La Plata; La Plata: EDULP.

Hilbert, D. (1971). Grundlagen der Geometrie. 14. Auage, B.G.Teubner, Stuttgart, Leibzig, 1999. Versión en inglés: David Hilbert, Foundations of Geometry, 2nd English edition, Open Court, LaSalle.

Frege, G. (1976). *Wissenschaftlicher Briefwechsel.* En Gabriel, G. et al., Felix Meiner, Hamburgo.

Giovannini, E. (2012). Una imagen de la realidad geométrica: la concepción axiomática de la geometría de Hilbert a la luz de la *Bildtheorie* de Heinrich Hertz. *Crítica. Revista Hispanoamericana de Filosofía*, 44, pp. 27-53.