

UN ACERCAMIENTO A LA DERIVACIÓN NUMÉRICA

AN APPROACH TO NUMERICAL DERIVATION

Autores: M. Sc. Sergio Antonio Fernández Morín, Profesor Asistente

Correo electrónico: sergiofm@unah.edu.cu

M. Sc: María Teresa Gil Chávez, profesora auxiliar

Correo electrónico: mariat@unah.edu.cu

Institución: Universidad Agraria de La Habana “Fructuoso Rodríguez Pérez”, Facultad de Ciencias Pedagógicas, Departamento de Ciencias Naturales y Exactas

Resumen

El Análisis numérico es una reflexión sobre los cursos tradicionales de Aritmética, Geometría, Análisis Matemático, Álgebra, entre otros, que se concreta en una serie de métodos o algoritmos, con un número finito de operaciones que permiten obtener resultados numéricos a ejercicios y problemas. Unidos dialécticamente a estos están los métodos considerados exactos, los cuales brindan el marco teórico necesario para la Matemática Numérica. Este contenido forma parte de las Matemáticas superiores que reciben las carreras de ingeniería y algunas de perfil pedagógico, formando parte de la asignatura de igual nombre: Matemática Numérica, considerada pues, como una ampliación del Análisis Matemático. Entre los temas de la asignatura citada está la derivación numérica la cual consiste en una técnica de análisis numérico para calcular una aproximación de la derivada de una función en un punto. Este material se centra en brindar algunas ideas de cómo se obtienen las fórmulas de derivación numérica, partiendo del propio concepto de derivada como un límite y empleando otras como la fórmula de Taylor, se ejemplifican además otros significados de la derivada que permiten resolver problemas vinculados con la ciencia, la economía y la sociedad.

Palabras clave: fórmula, aproximación, error, derivada, progresiva, centrada, regresiva, tasas relacionadas, razones de cambio

Abstract

Numerical Analysis is a reflection on the traditional courses of Arithmetic, Geometry, Mathematical Analysis, Algebra, among others, which is specified in a series of methods or algorithms, with a finite number of operations that allow obtaining numerical results for exercises and problems. Dialectically linked to these are the methods considered exact, which provide the necessary theoretical framework for Numerical Mathematics. This content is part of the higher Mathematics that engineering degrees receive and some with a pedagogical profile, forming part of the subject of the same name: Numerical Mathematics, considered, therefore, as an extension of Mathematical Analysis. Among the topics of

the aforementioned subject is numerical derivation, which consists of a numerical analysis technique to calculate an approximation of the derivative of a function at a point. This material focuses on providing some ideas on how numerical derivation formulas are obtained, starting from the concept of the derivative itself as a limit and using others such as Taylor's formula. Other meanings of the derivative are also exemplified that allow solving problems related to science, economy and society.

Keywords: formula, approximation, error, derivative, progressive, centered, regressive, related rates, rates of change

Introducción

El análisis numérico y sus métodos forman una unidad dialéctica entre el análisis matemático cualitativo y el análisis cuantitativo. El primero nos dice, por ejemplo, que bajo ciertas condiciones, algo existe, que es o no único, en tanto, el segundo complementa al primero, permitiendo calcular el valor de aquello que existe.

Así pues, el análisis numérico es una reflexión sobre los cursos, entre otras ramas, de Álgebra y Análisis Matemático con todos sus contenidos acerca de funciones, límite, Cálculo diferencial e Integral, etc. Estos se concretan en una serie de métodos o algoritmos cuya finalidad es obtener resultados numéricos de problemas matemáticos vinculados con la ciencia la técnica, la economía, entre otras, a partir de datos numéricos y de un número finito de operaciones matemáticas.

La derivación numérica es una técnica de análisis numérico para calcular una aproximación a la derivada de una función en un punto utilizando los valores y propiedades de la misma.

Con frecuencia es necesario conocer el valor aproximado de la derivada de una función en un punto y en la mayoría de los casos no se tiene la expresión analítica de dicha función.

La principal idea que subyace en las técnicas de derivación numérica está muy vinculada a la interpolación. La misma consiste en que a partir del valor de una función en puntos próximos al punto en que se quiere calcular la derivada, es posible obtener una aproximación de la misma y conocer el orden de error cometido en la aproximación.

La derivación numérica forma parte del contenido de la asignatura Matemática numérica, que se imparte en las carreras de ingeniería y pedagogía relacionadas con las Ciencias exactas como la Matemática y la Física.

Entre los objetivos del programa de la asignatura están, describir el concepto de derivada numérica en un punto, aplicar las fórmulas de desarrollo de Taylor para obtener las fórmulas de derivación y estimar el error de aproximación en el cálculo de las derivadas, establecer y diferenciar las diferentes fórmulas de derivación numérica y su clasificación en progresivas, centradas y regresivas, utilizar la interpolación polinomial para calcular aproximadamente la derivada de una función en un

punto, así como utilizar herramientas informáticas para la resolución de problemas que conlleven al cálculo de la derivación numérica.

Desarrollo

El cálculo diferencial permitió formalizar diferentes conceptos, entre ellos, generalizar el concepto de recta tangente a una curva en un punto cualquiera de su dominio y llegar así a la definición de derivada de una función en un punto:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad [1]$$

Aunque es justo aclarar que hoy en día el concepto de derivada tiene múltiples aplicaciones en la vida diaria.

Es conocido que en la práctica se emplean reglas y fórmulas para derivar funciones, sin embargo, el interés radica ahora en el concepto de derivada y la obtención de expresiones representadas con el número [1], pues se emplean en la resolución de problemas de la ciencia, la economía, la ingeniería, etc., que pueden tener un resultado exacto o aproximado.

En otras ciencias, tal como ocurre en Matemática, el concepto de derivada está asociado a las llamadas *razones de cambio* de una magnitud respecto a la otra, por ejemplo, en Física la ecuación del movimiento es una función "s" en función del tiempo "t" y se entiende la velocidad promedio "v" como la razón entre el desplazamiento sobre el tiempo: $v = \frac{s}{t}$. La velocidad instantánea $v(a)$ en un instante $t = a$, se define como: $v(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$, la velocidad de una partícula es la razón de cambio del desplazamiento con respecto al tiempo, asimismo, la razón de cambio del trabajo con respecto al tiempo es la potencia.

En Química la razón de cambio en la concentración de un reactivo con respecto al tiempo se considera como la velocidad de reacción. En las ciencias económicas o contables, a la razón de cambio del costo de producir "x" toneladas de un determinado material por una unidad de tiempo con respecto a "x" se conoce como costo marginal. En la Biología se puede obtener también la razón de cambio de la población de una colonia de bacterias con respecto al tiempo.

La introducción del concepto de derivada nos permite hacer cálculos aproximados más precisos para las funciones derivables, dado que si la función $f(x)$ es derivable se cumple la expresión dada [1].

Ahora bien, si se considera el valor de h lo suficientemente pequeño la razón $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ proporciona el valor aproximado de la derivada, como se plantea a continuación:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \quad \text{o bien: } f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \quad [2]$$

La expresión [2] permite calcular la derivada con cualquier grado de precisión a cuenta de la elección adecuada de h , lo que se infiere de la definición de límite. En el empleo de esta fórmula se hace necesario estimar el orden de aproximación de la derivada, calculándola respecto a h .

Una de las fórmulas para obtener el orden de las derivadas y estimar la aproximación es la fórmula de Taylor, estudiada en cursos anteriores de Análisis matemático. Estas deben su nombre al matemático inglés Brook Taylor, quien vivió entre 1685 y 1731.

La fórmula de desarrollo de Taylor, permite expresar las funciones analíticas como una serie de potencias en la forma $(x - x_0)^n$ empleando la relación:

$$f(x) = P_n(x) - R_n(x) \quad [3]$$

Donde $f(x)$ es una función continua y derivable hasta el orden $n + 1$ en un entorno del punto x_0 , $P_n(x)$ es un polinomio de grado no superior a " n " cuyo valor en el punto x_0 es igual al de la función f , así como los valores de sus derivadas, se considera que, el polinomio $P_n(x)$ se aproxima a $f(x)$ y recibe el nombre de *polinomio de Taylor*.

La expresión $R_n(x)$ se conoce con el nombre de *término complementario o residual*. Algunos autores difieren en llamar término residual de la serie y resto de la serie, tal equivalencia coincide cuando la serie es convergente, tema que no es objeto de estudio en este material, por lo que se le continuará llamando término residual.

La igualdad [3] tiene mayor exactitud para aquellos valores de x en el que el término residual $R_n(x)$ es pequeño y el polinomio $P_n(x)$ da un valor aproximado de la función $f(x)$.

Una expresión ampliada de la fórmula de Taylor es la siguiente:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \frac{(x-x_0)^3}{3!} f'''(x_0) + \dots$$

$$\dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^{n+1} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \quad [4]$$

$$\text{donde: } x_0 < \xi < x, \quad \xi = x_0 + \theta(x - x_0), \quad 0 < \theta < 1$$

El último término corresponde al término residual que también se le llama *fórmula de Lagrange*, empleada en el desarrollo de potencias para estimar el error de aproximación.

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \quad [4']$$

$$\text{Donde: } x_0 < \xi < x, \quad \xi = x_0 + \theta(x - x_0), \quad 0 < \theta < 1$$

El valor de ξ no se conoce con exactitud, solo que está entre x_i y x_{i+1} . Según el teorema del valor medio si una función f y su derivada son continuas en el intervalo (x_i, x_{i+1}) entonces existe un punto en que la pendiente es igual a $f'(\xi)$, que es paralela a la línea que une $f(x_i)$ y $f(x_{i+1})$, como muestra la figura 1.

Se cumple que:

$$f'(\xi) = \frac{R_0}{h}$$

O también:

$$R_0 = f'(\xi) \cdot h$$

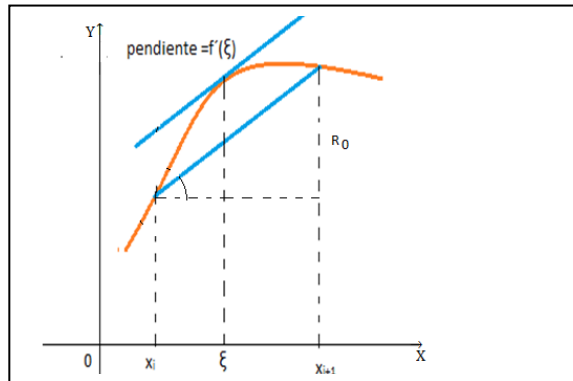


Fig.: 1

Las versiones de orden superior son una extensión lógica del razonamiento anterior, por ejemplo de segundo, tercer o de orden $(n + 1)$, serían:

$$R_1 = \frac{f''(\xi)}{2!} h^2 \quad R_2 = \frac{f'''(\xi)}{3!} h^3 \quad \dots \quad R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot h^{n+1}$$

Para hacer más comprensible el valor de ξ y en búsqueda de una expresión para este se conviene en considerarlo como un valor comprendido entre x_0 y x , como muestra la figura 2, con x_0 y x puntos fijos donde se aprecia que: $x_0 < \xi < x$, entonces: $\xi - x_0 < x - x_0$, o sea si se toma un valor θ con $0 < \theta < 1$ quedaría: $\xi - x_0 = \theta(x - x_0)$, de donde: $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$.

Para cualquier valor de x fijo y si $0 < \theta < 1$ se cumple que:

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \rightarrow 0$$

cuando $n \rightarrow \infty$ y los valores del polinomio $P_n(x)$ se aproximan cada vez más a la función $f(x)$.

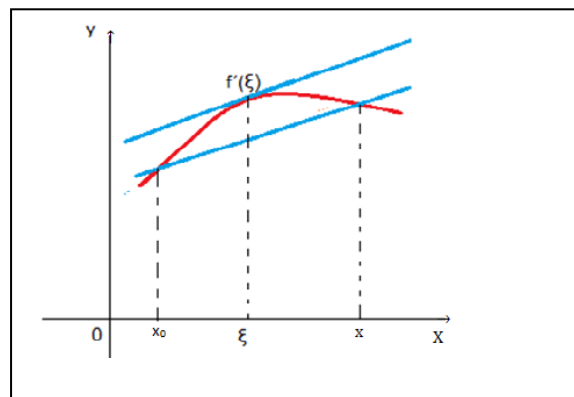


Fig.: 2

Por estas inferencias el término residual de orden $n + 1$ de la fórmula de Taylor es un infinitésimo de orden más alto que todos los términos del polinomio de Taylor cuando $x \rightarrow x_0$. Por esta razón la expresión $R_n(x)$ se puede emplear para acotar el residuo de una serie.

Ejemplo 1:

Desarrollar la función $f(x) = \ln x$ en potencias de $x - 1$ hasta el orden $n = 4$.

Al responder este ejercicio se debe tener en cuenta que si el desarrollo se pide hasta el orden $n = 4$, para llegar al término residual se desarrolla hasta el orden $n = 5$. Además si $x - x_0 = x - 1$, entonces: $x_0 = 1$.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)(x-x_0)}{1!} + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x-x_0)^4 + \dots$$

$$\dots + \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}(x-x_0)^5$$

Derivando sucesivamente la función dada y evaluando estas derivadas en el punto $x_0 = 1$, se obtiene:

$$f(x) = \ln x, \quad f(1) = \ln 1 = 0, \quad f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f'(1) = 1, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f''(1) = -1, \quad f'''(x) = \frac{2}{x^3}, \quad f'''(1) = 2,$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4}, \quad f^{(4)}(1) = -6, \quad f^{(5)}(x) = -\frac{24}{x^5}, \quad f^{(5)}(\xi) = -\frac{24}{\xi^5}$$

Sustituyendo en la fórmula de Taylor:

$$f(x) = 0 + 1(x-1) - \frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{2}{3!}(x-1)^3 - \frac{6}{4!}(x-1)^4 + \frac{24}{5!}f^{(5)}(\xi)(x-1)^5$$

$$f(x) = x - 1 - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \underbrace{\frac{24}{5!}f^{(5)}(\xi)(x-1)^5}_{R_n(x)}$$

Si $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$ con $0 < \theta < 1$ se cumple que $f^{(5)}(\xi)(x-1)^5 \rightarrow 0$, luego el desarrollo se aproxima cada vez más a $f(x)$.

Cuando en la expresión [4] se sustituye x_0 por 0, dicha expresión recibe el nombre de *fórmula de Maclaurin*, la que permite expresar una función en potencias de x .

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)$$

$$\text{donde: } \xi = \theta x, \quad 0 < \theta < 1 \quad [5]$$

A continuación se ilustra cómo se obtienen las fórmulas de las primeras derivadas mediante la fórmula de Taylor.

Supongamos que la función f tiene en una vecindad de x_0 derivada acotada de segundo orden, entonces la expresión aproximada para $f'(x)$ mediante la fórmula de Taylor, considerando que si:

$x - x_0 = h$, entonces: $x - h = x_0$ y $x = x_0 + h$, resulta:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{hf'(x_0)}{1!} + \frac{h^2f''(\xi)}{2!} \quad \text{Con } \xi = x_0 + \theta h \quad \text{con } 0 < \theta < 1 \quad [6]$$

De donde:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h \left[f'(x_0) + \frac{h}{2!}f''(\xi) \right] \quad \text{Factorizando}$$

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0) + \frac{h}{2!}f''(\xi) \quad \text{Despejando}$$

Como $\frac{h}{2!} f''(\xi) \rightarrow 0$ cuando $h \rightarrow 0$ se puede escribir como:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0) + 0(h) \quad \text{o bien} \quad f'(x_0) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} + 0(h) \quad [7]$$

Esta expresión permite hallar el valor aproximado de la primera derivada con error $E = \left| \frac{h}{2!} f''(\xi) \right|$, o sea de primer orden " h ".

Uso de la notación $0(h^{n+1})$

Esta expresión resulta útil para evaluar el error de truncamiento, pues es posible decidir hasta donde se desea evaluar $f(x)$ mediante el desarrollo de Taylor para obtener un orden de derivación con un error lo suficientemente pequeño mediante la expresión $R_n(x) = \frac{h^{n+1}}{n+1} f^{(n+1)}(\xi)$, la cual puede expresarse entonces de la forma $R_n(x) = 0(h^{n+1})$, que es infinitésimo, o sea tiende a cero (algunos autores le llaman cero de h). Lo que significa que el error de truncamiento es de orden h^{n+1} , que es proporcional al incremento h elevado a la $n + 1$.

Por ejemplo: Si el error es de primer orden de h , $0(h)$ y el incremento $h = \frac{1}{2} = 0,5$, entonces el error se reduce a la mitad: $E = 0,5$, y si el error es de segundo orden de h , $0(h^2)$ y el incremento es $h = 0,5$, entonces el error se reduce a la cuarta parte: $E = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0,25$.

Si se conoce el valor de la función en un número de puntos igualmente espaciados o equidistantes es posible obtener mejores aproximaciones de la derivada en un punto entorno a estos y conocer el error cometido en la aproximación.

Dada la función $f(x)$ supongamos que se quiere calcular una aproximación al valor de su derivada en un punto x_0 , y que se conocen los siguientes valores de la función, expresados en la siguiente tabla, considerando para cada caso que $x - x_0 = h$.

$x_0 - 3h$	$x_0 - 2h$	$x_0 - h$	x_0	$x_0 + h$	$x_0 + 2h$	$x_0 + 3h$
$f(x_0 - 3h)$	$f(x_0 - 2h)$	$f(x_0 - h)$	$f(x_0)$	$f(x_0 + h)$	$f(x_0 + 2h)$	$f(x_0 + 3h)$

Tabla No 1

Como se seleccionó arbitrariamente el valor $x = x_0$ se cumple según [7] que:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad [8]$$

A la fórmula [8] se le llama *primera derivada numérica hacia adelante o progresiva de dos puntos* y con error de primer orden en h .

Para un punto equidistante a la izquierda de x_0 , se realiza un análisis similar al anterior. Supongamos también que la función f tiene en una vecindad o entorno del punto x_0 derivada acotada de segundo orden, entonces la expresión aproximada para $f'(x_0)$ con $h < 0$, según la fórmula de Taylor resulta:

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - f'(x_0)h + \frac{h^2 f''(\xi)}{2!} \quad [9] \quad \text{Con } \xi = x_0 + \theta h \quad \text{con } 0 < \theta < 1$$

De donde:

$\frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} = f'(x_0) + \frac{h}{2!} f''(\xi)$ y como $\frac{h}{2!} f''(\xi) \rightarrow 0$ cuando $h \rightarrow 0$ se puede escribir como $\frac{h}{2!} f''(\xi) = O(h)$, expresión que permite estimar el error de orden en h . Estos resultados permiten expresar la primera derivada aproximada de una función f en un punto a la izquierda de x_0 de la forma:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} \quad O(h) \quad [10]$$

A la fórmula anterior se le llama *primera derivada numérica hacia atrás o regresiva de dos puntos*.

Ahora bien, si las expresiones [6] y [9] se desarrollan mediante la fórmula de Taylor, considerando que la función f esté acotada en un entorno del punto x_0 hasta el orden $n = 3$, se obtiene:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}h^3 \quad \xi = \theta h, 0 < \theta < 1 \quad [11]$$

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 - \frac{f'''(\xi)}{3!}h^3 \quad \xi = \theta h, 0 < \theta < 1 \quad [12]$$

Restando las expresiones [11] y [12] y despejando $f'(x_0)$ resulta:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} = f'(x_0) + \frac{f'''(\xi)}{3!}h^2 \quad \xi = \theta h, \quad 0 < \theta < 1$$

Como $\frac{f'''(\xi)}{3!}h^2 \rightarrow 0$ cuando $h \rightarrow 0$, se considera un infinitésimo que se escribe como $O(h^2)$ y se toma

la aproximación con un error $E = \left| \frac{f'''(\xi)}{3!}h^2 \right|$, o sea de segundo orden en h .

La fórmula resultante del análisis anterior puede plantearse como:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} \quad O(h^2) \quad [13]$$

A la expresión [13] se le llama *primera derivada centrada de dos puntos*, y como el error es de orden h^2 , la aproximación mediante esta da resultados más precisos y con un error más pequeño que las anteriores.

En los gráficos siguientes, de la figura 3, se muestran las aproximaciones según el tipo de derivada y como se aprecia que en la derivada centrada la recta tangente a la curva de la función en un punto arbitrario x_i es paralela al segmento secante que une los extremos del intervalo $[x_{i-1}, x_{i+1}]$

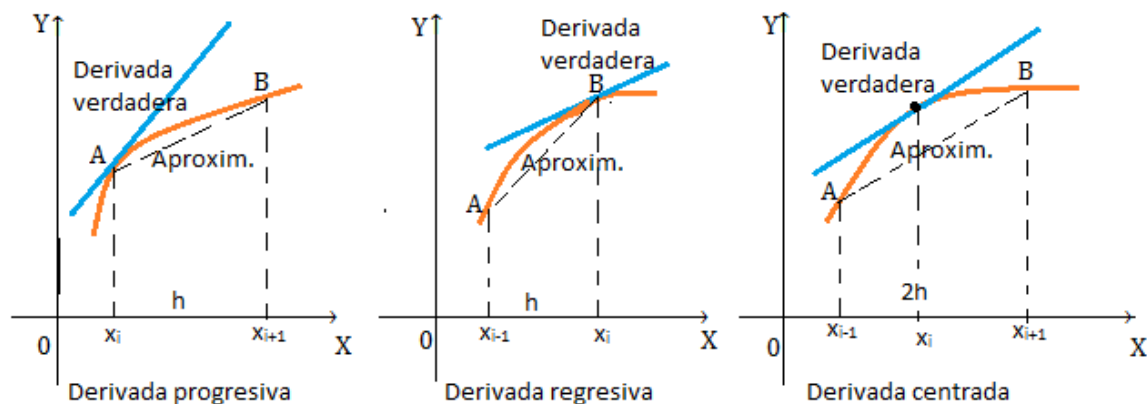


Fig.: 3

La figura 4 muestra como a medida que aumenta el orden de derivación, según la serie de Taylor, se obtiene una mejor aproximación entorno a un punto x_i .

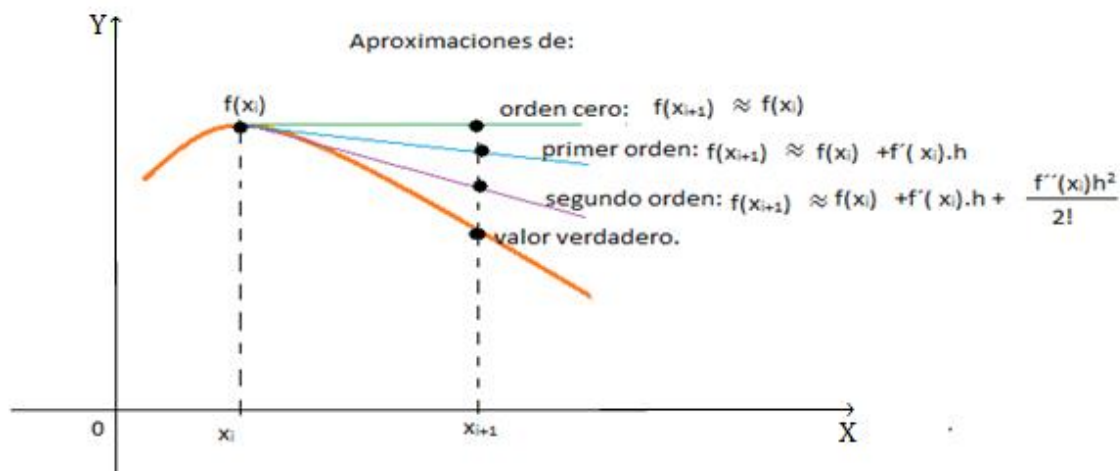


Fig.: 4

Ejemplo 2:

Calcular la primera derivada de la función $f(x) = \tan x$ en $x_0 = 1$ (medida dada en radianes), por las fórmulas anteriores para un valor de $h = 0,1$. Calcular los errores absoluto $E(x)$ y relativo $e(x)$ comparándolos con el valor exacto dado: $f'(1) = 3,42552$. Para los cálculos se puede emplear cualquier medio electrónico al alcance.

Como se conoce la función f y su f' , para el cálculo pedido se trabajará en las fórmulas de $f'(x_0)$ con la función dada. La primera derivada numérica progresiva se puede considerar en dos puntos pues se conocen $x_0 = 1$ y $h = 0,1$, por lo que son equivalentes las siguientes expresiones:

$$f(x_0 + h) = \tan(x_0 + h) = \tan(1 + 0,1)$$

Según la fórmula [8] se obtiene:

$$f'(1) = \frac{\tan(1+0,1) - \tan 1}{0,1} = \frac{\tan 1,1 - \tan 1}{0,1} = \frac{1,96476 - 1,55740}{0,1} = \frac{0,40736}{0,1} = 4,0736$$

En los cálculos de los errores se obtiene:

$$E(x) = |x^* - x| \quad (x^*, \text{valor exacto y } x, \text{valor aproximado obtenido})$$

$$E(x) = |3,42552 - 4,0736| = 0,64808$$

$$e(x) = \frac{E(x)}{x} \quad e(x) = \frac{0,64808}{3,42552} = 0,1891, \text{ que expresado en porciento es } 18,9 \%$$

Para la primera derivada numérica regresiva se considera que:

$$f(x_0 - h) = \tan(x_0 - h) = \tan(1 - 0,1)$$

Sustituyendo en la fórmula [10] resulta:

$$f'(1) = \frac{\tan 1 - \tan(1-0,1)}{0,1} = \frac{\tan 1 - \tan 0,9}{0,1} = \frac{1,55740 - 1,26016}{0,1} = \frac{0,29724}{0,1} = 2,97240$$

$$E(x) = |3,42552 - 2,97240| = 0,45312 \quad y \quad e(x) = \frac{0,45312}{3,42552} = 0,132 \quad (13,2\%)$$

Para la primera derivada centrada se emplean las expresiones obtenidas en las derivadas anteriores y se sustituyen en la fórmula [13].

$$f'(1) = \frac{\tan(1+0,1) - \tan(1-0,1)}{2(0,1)} = \frac{\tan 1,1 - \tan 0,9}{0,2} = \frac{1,96476 - 1,26016}{0,2} = \frac{0,70460}{0,2} = 3,5230$$

$$E(x) = |3,42552 - 3,5230| = 0,09748 \quad y \quad e(x) = \frac{0,09748}{3,42552} = 0,028 \quad (2,8 \%)$$

De estos resultados se puede inferir que se obtiene un menor error, por lo que se alcanza una mejor aproximación con el empleo de la fórmula de la derivada centrada.

En las fórmulas de derivación anteriores, se han obtenido expresiones en las que aparecen dos puntos, a la derecha, a la izquierda o a ambos lados entorno a un punto x_0 . Sin embargo si se quiere obtener resultados más precisos se puede hacer uso de la función evaluando en más puntos, como muestra la tabla No 1. A continuación, se muestra la deducción de la fórmula para $f'(x_0)$, seleccionando x_0 , $x_0 + h$ y $x_0 + 2h$. Aplicando la fórmula de Taylor y considerando las derivadas respectivas acotadas hasta el orden $n = 3$.

Si $x = x_0 + 2h$, entonces $x - x_0 = 2h$ y se tiene que:

$$f(x_0 + 2h) = f(x_0) + f'(x_0).2h + \frac{f''(x_0)}{2!}4h^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}8h^3 \quad \xi = \theta h, 0 < \theta < 1$$

$$f(x_0 + 2h) = f(x_0) + 2f'(x_0).h + 2f''(x_0)h^2 + \frac{8f'''(\xi)}{3!}h^3 \quad \xi = \theta h, 0 < \theta < 1 \quad [14]$$

Para obtener una expresión para $f'(x_0)$, se multiplica la expresión [11] por 4 y la expresión resultante se sustrae de la [14]. De esta forma se obtiene sucesivamente:

$$4f(x_0 + h) = 4f(x_0) + 4f'(x_0)h + 2f''(x_0)h^2 + \frac{4f'''(\xi)}{3!}h^3$$

$$f(x_0 + 2h) - 4f(x_0 + h) = -3f(x_0) - 2f'(x_0)h + \frac{4f'''(\xi)}{3!}h^3$$

$$f(x_0 + 2h) - 4f(x_0 + h) + 3f(x_0) = -2h \left[f'(x_0) + \frac{2f'''(\xi)}{3!}h^2 \right] \quad (\text{Transponiendo y factorizando})$$

$$\frac{-3f(x_0) + 4f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)}{2h} = f'(x_0) + \frac{2f'''(\xi)}{3!}h^2 \quad (\text{Despejando } f'(x_0))$$

Como se cumple que $\frac{2f'''(\xi)}{3!}h^2 \rightarrow 0$, cuando $h \rightarrow 0$, entonces se obtiene una aproximación de la primera derivada cometiendo un error $E = \left| \frac{2f'''(\xi)}{3!}h^2 \right|$, o sea, de orden 2 en h [$O(h^2)$]. A dicha derivada, se le llama **primera derivada numérica progresiva de tres puntos** y se escribe:

$$f'(x_0) = \frac{-3f(x_0) + 4f(x_0+h) - f(x_0+2h)}{2h} \quad O(h^2) \quad \boxed{15}$$

Siguiendo un proceso similar, se pueden deducir mediante la fórmula de Taylor el resto de las primeras derivadas centradas y regresivas y que por su importancia para la resolución de ejercicios y problemas, se resumen a continuación.

- *Primera derivada numérica centrada, de cuatro puntos y error de cuarto orden en h .*

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0-2h) - 8f(x_0-h) + 8f(x_0+h) - f(x_0+2h)}{12h} \quad O(h^4) \quad \boxed{16}$$

- *Primera derivada numérica hacia atrás o regresiva, de tres puntos y error de segundo orden en h :*

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0-2h) - 4f(x_0-h) + 3f(x_0)}{2h} \quad O(h^2) \quad \boxed{17}$$

Las derivadas de mayores órdenes se obtienen considerando la función f acotada hasta un orden superior de derivación y empleando la fórmula de Taylor siguiendo un análisis similar a los anteriores. Por ejemplo, las fórmulas para las segundas derivadas serían las siguientes:

$$f''(x_0) = \frac{f(x_0) - 2f(x_0+h) + f(x_0+2h)}{h^2} \quad O(h) \quad \boxed{18} \quad (\text{Progresiva de tres puntos})$$

$$f''(x_0) = \frac{f(x_0-2h) - 2f(x_0-h) + f(x_0)}{h^2} \quad O(h) \quad \boxed{19} \quad (\text{Regresiva de tres puntos})$$

$$f''(x_0) = \frac{f(x_0-h) - 2f(x_0) + f(x_0+h)}{h^2} \quad O(h^2) \quad \boxed{20} \quad (\text{Centrada de tres puntos})$$

Ejemplo 3:

La siguiente tabla muestra algunos valores de una función f . Calcula la primera derivada de f en el punto $x_0 = 1$ considerando un error de aproximación de primer y segundo orden, atendiendo a las derivadas progresivas, centradas y regresivas. Se sugiere el uso de medios electrónicos de cálculo.

x_i	0	0,5	1,0	1,5	2,0
$f(x_i)$	1	2,125	6	10,375	25

Tabla No 2

Respuesta:

Se tiene que $x_0 = 1$ y $h = 0,5 - 0 = 0,5$; $h = 1,0 - 0,5 = 0,5$; $h = 1,5 - 1,0 = 0,5$;

$h = 2 - 1,5 = 0,5$; luego el valor del paso $h = 0,5$ es constante. En la práctica no es necesario realizar todos los cálculos, esto se puede verificar por simple inspección. La tabla dada se puede

reconstruir agregando una fila superior con los espacios equidistantes, considerando a $x_0 = 1$ como el valor central:

	$x_0 - 2h$	$x_0 - h$	x_0	$x_0 + h$	$x_0 + 2h$
x_i	0	0,5	1,0	1,5	2,0
$f(x_i)$	1	2,125	6	10,375	25

Tabla No 3.

Calculando la primera derivada progresiva, de dos puntos con error de primer orden, empleando la fórmula [8]

$$f'(1) = \frac{10,375-6}{0,5} = \frac{4,375}{0,5} = 8,75$$

La primera derivada progresiva de tres puntos se puede calcular empleando la fórmula [15].

$$f'(1) = \frac{-3(6)+4(10,375)-25}{2(0,5)} = \frac{-18+41,5-25}{1} = -1,5 \quad (\text{Con error de segundo orden})$$

Las primeras derivadas regresivas de dos y tres puntos se pueden determinar mediante las fórmulas [16] y [17] respectivamente.

$$f'(1) = \frac{6-2,125}{0,5} = \frac{3,875}{0,5} = 7,75 \quad (\text{Con error de primer orden})$$

$$f'(1) = \frac{1-4(2,125)+3(6)}{2(0,5)} = \frac{1-8,5+18}{1} = -25,5 \quad (\text{Con error de segundo orden})$$

La primera derivada centrada, con error de segundo orden, se determina utilizando la fórmula [13].

$$f'(1) = \frac{10,375-2,125}{2(0,5)} = \frac{8,25}{1} = 8,25$$

Se puede apreciar que las derivadas progresivas y centradas poseen valores aproximados.

Nota: Se han tenido en cuenta las reglas del cálculo aproximado y del redondeo.

Anotaciones importantes

En la introducción de este tema se hace alusión a la relación que existe entre el concepto de derivada y de su aplicación a otras ramas de las ciencias, principalmente mediante las llamadas razones de cambio. A continuación, se enumeran algunos conceptos y relaciones que permitirían una mejor interpretación y formulación de las derivadas, para una solución más adecuada de los problemas, sobre estas ciencias.

- Idea general: La derivada $f'(x)$ de una función $f(x)$ es la razón instantánea de cambio de $y = f(x)$ con respecto a x .
- Para la Matemática numérica, que al resolver problemas emplea, de forma general, una recopilación de datos empíricos, se utiliza la aproximación: $f'(x) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, en la

medida que h se hace lo suficientemente pequeño u otra de las fórmulas de la derivación numérica.

- La velocidad v en un instante de tiempo $t = t_0$ se define como $v = f'(t)$.
- La velocidad de una partícula es la razón de cambio del desplazamiento con respecto al tiempo, o sea: $v(t) = s'(t)$.
- La razón de cambio del trabajo realizado (w) por una fuerza con respecto al tiempo se le conoce como potencia $P(t)$ y se denota: $P(t) = w'(t)$.

Otras razones de cambio que implican el uso de la derivación:

- En Geografía o meteorología, la razón de cambio de la temperatura con respecto al tiempo. O la razón con la que cambia la presión atmosférica con respecto a la altura.
- En Geología, se puede determinar la razón de cambio a la cual el agua fluye hacia adentro o hacia afuera de un depósito.
- En urbanismo, se puede determinar la razón en que cambia la densidad de población de una ciudad al aumentar o disminuir la distancia al centro de la propia ciudad.
- En Química, la velocidad de reacción es la razón de cambio en la concentración de un reactivo con respecto al tiempo.
- En Contabilidad o Economía, el costo marginal en producir un artículo es la razón de cambio del costo total con respecto al tiempo.
- En Psicología, se puede medir, por ejemplo, el aprendizaje mediante la razón del rendimiento del aprendizaje en función del tiempo de capacitación para dicho aprendizaje.
- En Sociología, se puede analizar la relación del interés de una población sobre innovaciones, novedades, modas, etc. Si se denota a $p(t)$ como la proporción de una población que conoce un rumor en un tiempo t , entonces la derivada $\left(\frac{dp}{dt}\right)$ denota la velocidad en que se esparce el rumor.
- Si se conoce la cantidad de habitantes de una población $P(t)$ en un período de tiempo t y se desea conocer la tasa de crecimiento, esta es la razón de cambio del total de la población con respecto al tiempo.

Ejemplo 4:

La siguiente tabla muestra los datos registrados por el desplazamiento (s) de un móvil en movimiento uniforme, en determinados intervalos de tiempo (t).

(s en metros y t en segundos)

t	1,5	3	4,5	6	7,5	9
-----	-----	---	-----	---	-----	---

$s(t)$	9,5	29	57,5	95	141,5	127
--------	-----	----	------	----	-------	-----

Tabla No 4

- Calcule la velocidad que alcanza el móvil a los 4,5 segundos.
- Calcule la aceleración del móvil a los 4,5 s.

Respuesta:

a) Se conoce que de manera general en el movimiento uniforme de un cuerpo el desplazamiento se expresa en función del tiempo y la velocidad es constante. Dicha velocidad en un instante dado, se define como la derivada del desplazamiento con respecto al tiempo: ($v = s'(t)$).

Como no se conoce la expresión del desplazamiento, sino algunos valores, la velocidad del móvil en el instante $t_0 = 4,5$ s; se hallará mediante la derivación numérica. La expresión para la velocidad empleando las notaciones de la tabla y la fórmula [13], como la derivada centrada de primer orden de dos puntos y error de segundo orden, resulta:

$$v = s'(t) = \frac{s(t_0+h) - s(t_0-h)}{2h}$$

$$v = s'(4,5) = \frac{s(6) - s(3)}{2(1,5)} = \frac{95 - 29}{3} = \frac{66}{2} = 22 \text{ m/s}$$

b) Para el cálculo de la aceleración, se tendrá en cuenta que esta es la rapidez con que cambia la velocidad, es decir, la derivada de la velocidad con respecto al tiempo o también se puede interpretar como la segunda derivada del desplazamiento respecto al tiempo ($a = v'(t) = s''(t)$). Empleando la fórmula [20], de la segunda derivada centrada de tres puntos y error de segundo orden, resulta:

$$a = s''(t) = \frac{s(t_0-h) - 2s(t_0) + s(t_0+h)}{h^2}$$

$$a = s''(4,5) = \frac{s(3) - s(4,5) + s(6)}{(1,5)^2} = \frac{29 - 2(57,5) + 95}{2,25} = \frac{29 - 115 + 95}{2,25} = \frac{9}{2,25} = 4 \text{ m/s}^2$$

Ejemplo 5

Sea $P(t)$ la población de cierto país en el tiempo t , expresado en años, mediante estimaciones de la población a mediados de años desde 2010 hasta 2018, según muestra la siguiente tabla. Interprete y estime el valor de $P'(2014)$ con un error de primer y segundo orden.

t	$P(t)$
2010	11 195 000
2012	11 280 000
2014	11 374 000
2016	11 464 000
2018	11 563 000

Tabla No 5

Respuesta:

La $P'(2014)$ significa la razón de cambio de P con respecto a $t_0 = 2014$, es decir, la tasa de aumento de la población en 2014.

Sea: $h = 2018 - 2016 = \dots = 2012 - 2010 = 2$

Calculando las primeras derivadas resulta:

$$P'(t_0) = \frac{P(t_0+h)-P(t_0)}{h}$$

$$P'(2014) = \frac{P(2014+2)-P(2014)}{2} = \frac{P(2016)-P(2014)}{2} = \frac{11464000-1137400}{2} = 45\,000$$

$$P'(t_0) = \frac{P(t_0)-P(t_0-h)}{h} \quad P'(2014) = \frac{P(2014)-P(2012)}{2} = \frac{11\,374\,000-11\,280\,000}{2} = 47\,000$$

Estos resultados significan que la tasa de aumento de la población en 2014 estuvo entre 45 000 y 47 000 habitantes.

$$P'(t_0) = \frac{P(t_0+h)-P(t_0-h)}{2h} \quad P'(2014) = \frac{P(2016)-P(2012)}{4} = \frac{11\,464\,000-11\,280\,000}{4} = 46\,000$$

Este último resultado de la primera derivada centrada significa que la razón de crecimiento de la población era en 2014 aproximadamente de 46 000 habitantes.

Al final de este trabajo se enumera una bibliografía en que el lector interesado puede profundizar en los apasionantes temas propuestos aquí por los autores.

Conclusiones

La Matemática Numérica comprende, entre otros procedimientos, los métodos numéricos para resolver ejercicios y problemas que por los métodos exactos sería difícil o hasta imposible de resolver. No obstante queda clara la unidad dialéctica entre los métodos exactos y numéricos que brinda la Matemática al permitir la complementación de ambos métodos.

La Matemática Numérica posee valor práctico para resolver problemas de la ciencia, la técnica, la economía y la sociedad en general y ofrece métodos didácticos de autoaprendizaje para el cálculo aproximado, la representación de funciones, la derivación e integración de funciones, entre otras situaciones matemáticas.

La derivación numérica forma parte de los contenidos de esta rama y se evidencia que es una técnica de análisis numérico para calcular una aproximación de la derivada de una función en un punto.

La principal idea que subyace en la derivación numérica está vinculada a la interpolación, o sea, si de una función f , como en la mayoría de los casos, no se conoce su expresión analítica, y si algunos de sus valores, puede aproximarse la función f por otra cuyos valores de las derivadas coincidan. En este vasto conglomerado de fórmulas juega su papel fundamental la llamada fórmula

de Taylor, con la que, a través de transformaciones algebraicas se obtienen las fórmulas aproximadas de derivación numérica.

Con la teoría y ejemplos expuestos se aprecia el incalculable valor de las fórmulas de derivación como una herramienta para resolver ejercicios y problemas de la ciencia, la técnica, la economía y la sociedad.

Bibliografía

Álvarez, M. y Guerra, A. (2004). *Matemática numérica*. La Habana, Cuba: Félix Varela.

Ayres, F. (1975). *Cálculo Diferencial e Integral. Teoría y problemas*. La Habana, Cuba: Pueblo y Educación.

Baldor, A. (sin año). *Aritmética*. La Habana, Cuba: Culturales. S.A.

Botelo, S. (2003). *Ejemplos de aplicación de los métodos numéricos a problemas de ingeniería*. Ciudad México, México: CIMAT.

Bugrov, Ya.S. y Nikolski S.M.(1985). *Matemáticas superiores*. Moscú, URSS: Mir.

Claro, M. S. (2003). *Matemática superior, partes 1 y 2*. La Habana, Cuba: Félix Varela. (ISBN: 959-258-453-2, obra completa).

Conde, C.(2017) “Programación y métodos numéricos”, http://ocw.upm.es/matematica-aplicada/programacion-y-metodos-numericos/contenidos/TEMA_5/Apuntes/Derivacion_OCW.pdf, Madrid España.

Danílina, N.I y Dubróvskaya, N.S. (1990). *Matemática de Cálculo*. Moscú, URSS: Mir.

Efímov, A y Demidovich, B. (1983). *Problemas de las matemáticas superiores*. Tomos I, II y III. Moscú, URSS: Mir.

Galiana, T. (1988). *Pequeño Larousse de ciencias y técnicas*. La Habana, Cuba: Editorial científico-técnica.

Jiménez, M, H. (2010). *Análisis Matemático en R*. La Habana, Cuba: Pueblo y Educación.(ISBN: 978-959-13-2063-6)

Kudriávsev, L.D. (1983). *Curso de Análisis Matemático*. Tomos 1 y 2. Moscú, URSS: Mir.

Kudriávsev, L.D. y Demidovich, B. (1989). *Breve curso de Matemáticas superiores*. Moscú, URSS: Mir.

Muto, V. (2006). *Curso de métodos numéricos*. País Vasco, España.

Nieves, A (2014). *Métodos numéricos aplicados a la ingeniería*. Ciudad México, México: Patria.

Piskunov, N. (1980). *Cálculo Diferencial e Integral, tomos I y II*. Moscú, URSS: Mir.

Ríbnikov, K. (1991). *Historia de las matemáticas*. Moscú, URSS: Mir. (ISBN:5-03-001912-X)

Saavedra, P. (1996). *Matemática numérica*. Ciudad México, México: Publicaciones SMM.

Stewart, J. (2011). *Cálculo con trascendentes tempranas, partes 1, 2, 3 y 4*. La Habana, Cuba. (ISBN: 978-959-13-2415-3, obra completa).

Suárez, M. (1988). *Matemática Numérica*. La Habana, Cuba: Libros para la educación.

Sydsaeter, K. y Hammond, P. J.(2003). *Matemáticas para el análisis económico, volúmenes 1 y 2*. La Habana, Cuba: Félix Varela.

Programa Informático Derive. Universidad de Valencia. España.