1.16

LAS ECUACIONES DIFERENCIALES, VÍNCULO ENTRE LOS MÉTODOS EXACTOS Y NUMÉRICOS PARA SU SOLUCIÓN

LAS ECUACIONES DIFERENCIALES, VÍNCULO ENTRE LOS MÉTODOS EXACTOS Y NUMÉRICOS PARA SU SOLUCIÓN

Autores: M.Sc. Sergio Antonio Fernández Morín, Profesor Asistente

M.Sc. María Teresa Gil Chávez, Profesora Auxiliar

Departamento de Ciencias Naturales y Exactas

Facultad de Ciencias Pedagógicas

Universidad Agraria de La Habana “Fructuoso Rodríguez Pérez”

Correo electrónico: sergiofm@unah.edu.cu mariat@unah.edu.cu,

Localidad: Mayabeque, Cuba

Resumen

La matemática numérica es la rama de la matemática que trata los métodos aproximados para la resolución de ejercicios y problemas. El Análisis numérico es una reflexión sobre los cursos tradicionales de Aritmética, Geometría, Análisis Matemático, Álgebra, entre otros, que se concreta en una serie de métodos o algoritmos, con un número finito de operaciones que permiten obtener resultados numéricos a ejercicios y problemas. Unidos dialécticamente a estos están los métodos considerados exactos, los cuales brindan el marco teórico necesario para la Matemática Numérica. Este contenido forma parte de las Matemáticas superiores que reciben las carreras de ingeniería y algunas de perfil pedagógico, formando parte de la asignatura de igual nombre: Matemática Numérica, considerada pues, como una ampliación del Análisis Matemático. Entre los temas de la asignatura citada está la resolución de ecuaciones diferenciales por varios métodos, partiendo del método de Euler. Este material se centra en brindar algunas ideas de cómo se obtienen las soluciones de las ecuaciones diferenciales, partiendo del vínculo entre las soluciones exactas y las aproximadas que brinda el primero de estos métodos numéricos, asimismo se ejemplifican problemas vinculados con la ciencia, la economía y la sociedad.

Palabras clave: ecuación diferencial, error, método numérico, método de Euler, ecuación estable.

Introducción

El análisis numérico forma parte de desarrollo de las ciencias matemáticas desde el surgimiento de estas. Así pues, el análisis numérico es una abstracción sobre los cursos, entre otras ramas, de

Álgebra, Geometría y Análisis Matemático con todos sus contenidos acerca de funciones, límite, Cálculo diferencial e Integral.

El análisis numérico está interesado en los procesos por los cuales pueden resolverse los problemas matemáticos, por las operaciones de la aritmética vinculando algoritmos, o sea, el análisis elige del procedimiento más adecuado y conveniente para la solución de un problema.

La resolución de ecuaciones diferenciales es considerada, quizás, como la más importante de todas las aplicaciones de la matemática superior, cuando los científicos de las ciencias sociales, naturales y exactas utilizan el Cálculo Diferencial e Integral, lo más frecuente es que tengan que analizar una ecuación diferencial que ha surgido en el proceso de modelar algún fenómeno en estudio. Aun cuando, con frecuencia es imposible hallar una fórmula explícita para la solución de una ecuación diferencial, y la solución de esta se hace difícil o imposible por métodos exactos, los procedimientos gráficos y numéricos proporcionan la información necesaria.

Al realizar un modelo matemático de un problema del mundo real se realiza a partir de un razonamiento intuitivo acerca del mismo o a partir de leyes físicas basadas en las evidencias experimentales, dicho modelo , en ocasiones, toma forma de una ecuación diferencial, es decir, una ecuación que contiene una función desconocida y algunas de sus derivadas, esto no es sorprendente, pues un problema del mundo real puede tratar acerca de cambios de una magnitud con respecto a otra, dichas magnitudes se pueden expresar mediante variables, y se desea predecir el comportamiento futuro sobre la base de cómo cambian los valores actuales.

Las soluciones de las ecuaciones diferenciales son las que permiten predecir el comportamiento hoy en día de fenómenos y problemas de la vida diaria, la ciencia y la sociedad en general. Puesto que por métodos exactos se pueden resolver una mínima cantidad de ecuaciones diferenciales el camino más eficaz para resolverlas son los métodos numéricos, que se pueden implementar, dado el desarrollo científico-técnico por medio de programas informáticos traducidos en software de computadoras, aplicaciones de teléfonos inteligentes, etc.

La resolución de ecuaciones diferenciales forma parte del contenido de la asignatura Matemática numérica, que se imparte en las carreras de ingeniería y pedagogía relacionadas con las Ciencias exactas como la Matemática y la Física.

Entre los objetivos del programa de la asignatura están, sistematizar el concepto de ecuación diferencial, aplicar las fórmulas que se obtienen de los métodos que existen para resolver ecuaciones diferenciales, así como utilizar herramientas informáticas para la resolución de problemas que conllevan una ecuación diferencial.

Los autores de este material pretenden hacer un acercamiento a la resolución numérica de ecuaciones diferenciales, su relación con los métodos exactos y mostrar algunas aplicaciones de estas en la resolución de problemas, que sirvan de beneficio a lectores interesados.

Desarrollo

De cursos de Análisis Matemático, se conoce el concepto de ecuación diferencial, algunos tipos de ecuaciones diferenciales y los procedimientos analíticos para resolverlas.

Definición (1): Ecuación diferencial ordinaria.

- Una ecuación diferencial ordinaria (EDO) de orden n es una ecuación que establece una relación entre la variable independiente *"x"*, la función $y(x)$ desconocida y una o más de sus derivadas hasta $y^{(n)}$ .Esta EDO puede ser expresada, respectivamente, implícita o explícitamente como:

$$f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \qquad a)$$

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) \qquad b) \qquad \boxed{1}$$

La resolución o integración de la EDO consiste en la determinación de las funciones $y(x)$ que satisfacen esta ecuación para todos los valores de x en un intervalo (a, b) finito o infinito.

La solución general de una EDO de orden n tiene la forma:

$$y = y(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) \qquad \boxed{2}$$

Donde: $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son constantes arbitrarias. La selección de estas constantes arbitrarias la aporta la solución particular.

Son ejemplos de ecuaciones diferenciales las siguientes:

$(A)\ y' = 2xy \qquad (B)\ x' = x^2 \cos t \qquad (C)\ \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{3y^2+1} \qquad (D)\ y'' - 3y' + 4 = x^2 + 1$

Uno de los primeros procedimientos analíticos estudiados, para resolver ecuaciones diferenciales es la separación de variables, a continuación se recordará el mismo mediante un ejemplo.

Ejemplo 1:

Resolver mediante la separación de variables la siguiente ecuación diferencial.

$a)\ y' = x^3 y$

Respuesta:

$a)\ y' = x^3 y$

$\frac{dy}{dx} = x^3 y$ (Expresándola en la notación de Leibniz)

$\frac{dy}{y} = x^3 dx$ (Expresando las variables con el diferencial correspondiente)

$\int \frac{dy}{y} = \int x^3 dx$ (Planteando la integral a ambos miembros)

$\ln|y| = \frac{x^4}{4} + c$ (Integrando)

Esta última expresión se puede considerar como la solución general de la ecuación diferencial. Una cuestión importante resulta ahora expresar esta en forma explícita, o sea, y en función de x.

$\log_e|y| = \frac{x^4}{4} + c$ (Expresando el logaritmo neperiano con base e)

$|y| = e^{\frac{x^4}{4}+c}$ (Aplicando la definición de logaritmo)

$y = \pm e^{\frac{x^4}{4}+c}$

$y = \pm e^{\frac{x^4}{4}}.e^c$ (Por propiedades de las potencias)

$y = \pm e^c.e^{\frac{x^4}{4}}$

Para facilitar una mejor forma de plantear el resultado anterior, conviene emplear la expresión $A = \pm e^c$, pues esta representa un valor numérico. Entonces, la expresión resultante se puede plantear como: $y = Ae^{\frac{x^4}{4}}$, donde A es una constante arbitraria.

Las EDO se clasifican en lineales y no lineales. Una EDO es lineal si la función f de $\boxed{1}$ depende linealmente de "y" y sus derivadas.

Si $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ son soluciones de la ecuación diferencial lineal entonces la combinación lineal: $c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x)$, con c_i constantes arbitrarias, también es solución de la ecuación diferencial lineal.

Una solución analítica o general de una ecuación diferencial lineal de orden n es la suma de la solución general (y_g) de la ecuación diferencial homogénea correspondiente (o asociada) y de la solución particular (y_p), o sea:

$$y(x) = y_g(x) + y_p(x) \qquad \boxed{3}$$

Resolución aproximada de ecuaciones diferenciales ordinarias. El problema de Cauchy

Es escaso el número de ecuaciones diferenciales que se resuelven por métodos analíticos y de ahí la importancia del estudio de los métodos numéricos para la solución aproximada de ecuaciones.

Usualmente, una ecuación diferencial ordinaria posee infinitas soluciones que se expresan en una sola igualdad mediante constantes arbitrarias. El número de las constantes arbitrarias esenciales de la solución general están relacionadas con el orden de la ecuación, de esto resulta que, si se desea precisar una única solución para una ecuación diferencial ordinaria de orden n hay que indicar n condiciones particulares que debe satisfacer la solución particular que se busca.

En la determinación de estas constantes arbitrarias se pueden presentar dos tipos de problemas:

I: Problema con condiciones iniciales o problema de Cauchy.

II: Problema con condiciones de contorno o de frontera.

En el caso I, se especifican todas las condiciones particulares para un mismo valor de la variable independiente. Esta cuestión de hallar la solución particular de una ecuación diferencial bajo condiciones iniciales fue planteada por Agustín Louis Cauchy (1789-1857), matemático francés, quien dio una definición de función y de límite más precisa que sus antecesores y realizó trabajos acerca de las ecuaciones diferenciales.

En el caso II, se incluyen condiciones particulares que deberá satisfacer la solución para dos o más valores de la variable independiente.

Nota: En lo adelante, este material, se dedicará al estudio solo del primero de estos problemas, o sea, al problema de Cauchy.

Entre los métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales se pueden citar los siguientes: método de Euler, métodos de Euler mejorados o métodos de Heun, del punto medio, de las series de Taylor, de Runge-Kutta, de Picard, entre otros. No es objetivo de los autores tratar en detalles todos estos métodos aquí, pues se perdería la esencia de lo que se persigue, por lo que se hará referencia solo al primero de ellos.

Antes de profundizar en los métodos numéricos para resolver las ecuaciones diferenciales se hace imperioso tratar previamente algunos conceptos y relaciones necesarias para facilitar la comprensión de los mismos.

Ecuaciones diferenciales de primer orden. El problema de Cauchy

Se sabe que una ecuación diferencial de primer orden es aquella en que solo aparece la primera derivada de la función incógnita respecto a la variable independiente. Esta derivada puede expresarse en forma explícita en términos de las variables dependientes e independientes, en lo adelante, se supondrá que la ecuación diferencial de primer orden se puede expresar como:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \quad \text{o} \quad y'(x) = f(x,y) \quad \text{o} \quad y' = f(x,y) \qquad \boxed{4.}$$

Como los métodos numéricos solo son capaces de hallar soluciones particulares de una ecuación diferencial, también se supone conocido el valor de la solución para algún valor de la variable independiente, es decir, el problema de Cauchy a resolver queda expresado de la siguiente forma:

$$\left.\begin{array}{r}\frac{dy}{dx} = f(x,y)\\ y(x_0) = y_0\end{array}\right\} \qquad \boxed{5}$$

Ejemplo 2:

Exprese en la forma $\boxed{5}$, si es posible, la ecuación diferencial siguiente.

$a)\ (3x-y)dx+(4x-5)dy=0;\quad y(-2)=6$

Respuesta:

Se pide expresar estas ecuaciones diferenciales según $\boxed{5}$, o sea, como el problema de Cauchy.

$a)\ (3x-y)dx+(4x-5)dy=0;\quad y(-2)=6$

$(4x-5)dy=-(3x-y)dx$ (Transponiendo según los diferenciales)

$\frac{dy}{dx}=-\frac{3x-y}{4x-5}$ (Despejando)

Este resultado se expresa como el problema de Cauchy de la siguiente forma:

$$\begin{cases}\frac{dy}{dx}=-\frac{3x-y}{4x-5}\\ y(-2)=6\end{cases}$$

Nota: La mayoría de los problemas de la ciencia, la técnica y de la sociedad que conducen a una ecuación diferencial se tratan de expresar como el problema de Cauchy, $\boxed{5}$.

Campo de direcciones o campo de pendientes

La ecuación $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ se puede interpretar como una relación de que a cada par ordenado (x,y) le hace corresponder un valor de la derivada y este, a su vez, se interpreta como una pendiente de un punto. La ecuación le hace corresponder a cada punto P del plano XY, donde la función f esté definida, una pendiente $f(x,y)$.

Considerando una región R del plano XY donde está definida la función $f(x,y)$. Sea P_i un conjunto discreto de puntos $\{P_1,P_2,\dots,P_m\}$ y sea f_i el valor de la función f para el punto P_i , es decir: $f_i=f(P_i)$ con: $i=1,2,\dots,m$; como muestra la figura No 4.1 a.

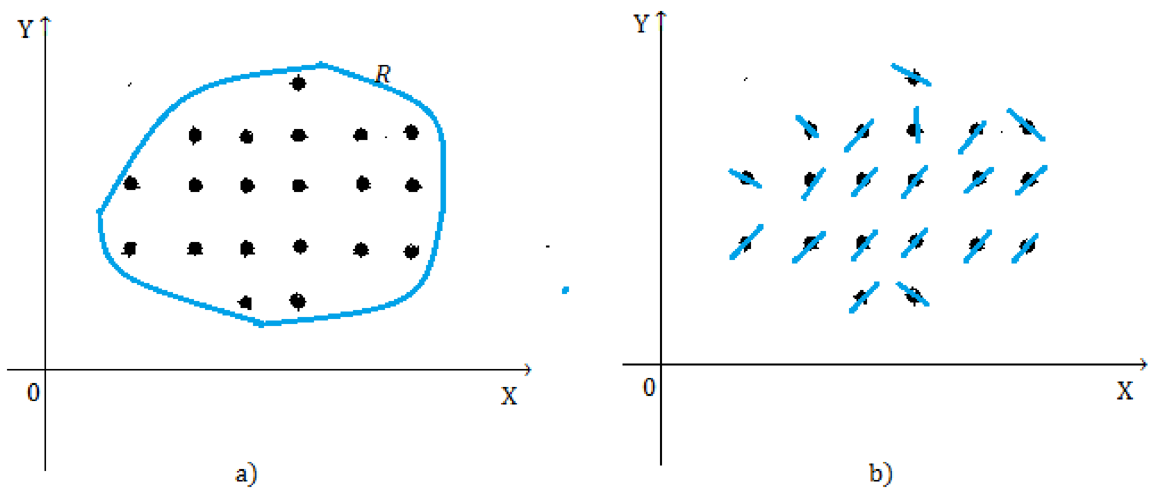

Fig.: No 1

Si se trazan segmentos rectilíneos cortos, con pendiente $f(x,y)$ en los puntos P_i se obtiene una gráfica llamada ***campo direccional o campo de pendientes***, como muestra la figura No 1 b. Estos segmentos rectilíneos inclinan la dirección hacia la curva solución, de modo que el campo direccional ayuda a visualizar la forma general de estas curvas.

Isoclinas

Las isoclinas son las curvas de igual inclinación y que tienen la propiedad de que en cada punto de una de estas curvas, el campo de direcciones posee la misma pendiente.

Si la ecuación diferencial es $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ las isoclinas tienen ecuaciones del tipo:

$$f(x,y) = k \qquad \boxed{6}$$

Ejemplo 3:

Se tiene la siguiente ecuación diferencial $y' = 2x - y$.

a) Dibuje el campo de direcciones para esta ecuación en la región rectangular $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq 2;\ -2 \leq y \leq 2\}$.
b) Trace la curva solución de dicha ecuación que pasa por el campo de direcciones.

Respuesta:

Según $\boxed{4}$, se tiene que: $f(x,y) = 2x - y$

Para obtener las pendientes del campo de direcciones, se sustituyen algunos valores significativos en la ecuación de la función y los resultados se exponen en la tabla No 1.

x	y	$y' = 2x - y$	x	y	$y' = 2x - y$	x	y	$y' = 2x - y$
-2	2	-6	$-\frac{1}{2}$	1	-2	1	1	1
-2	$\frac{3}{2}$	$-\frac{11}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	-1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
-2	1	-5	$-\frac{1}{2}$	-1	0	1	0	2
-2	0	-4	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	-1	3
-2	-1	-3	0	1	-1	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$
-2	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	1	2
$-\frac{3}{2}$	1	-4	0	0	0	$\frac{3}{2}$	0	3
$-\frac{3}{2}$	0	-3	0	-1	1	2	2	2

$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$
$-\frac{3}{2}$	-1	-2	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	2	1	3
-1	1	-3	$\frac{1}{2}$	1	0	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
-1	0	-2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			
-1	-1	-1	$\frac{1}{2}$	0	1			
-1	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	2			

Tabla No 1

Los valores de esta tabla expresan las pendientes de los puntos señalados, los cuales forman el campo de direcciones en los puntos más significativos como ilustra la figura No 2 a. La curva solución, se traza de forma paralela a los pequeños segmentos, o sea, en la dirección de los segmentos rectilíneos. Se puede apreciar que los puntos que están en los intervalos $-2 \leq x \leq \frac{1}{2}$ y $-\frac{1}{2} \leq y \leq 2$ poseen pendiente negativa, en $\left(-\frac{1}{2}; -1\right)$ la pendiente es cero y a partir de ahí los puntos que están a la derecha de este tienen pendiente positiva, lo que permite tener una idea de por dónde debe pasar la curva. Un gráfico aproximado de la curva solución de la ecuación diferencial dada aparece en la figura No 2 b.

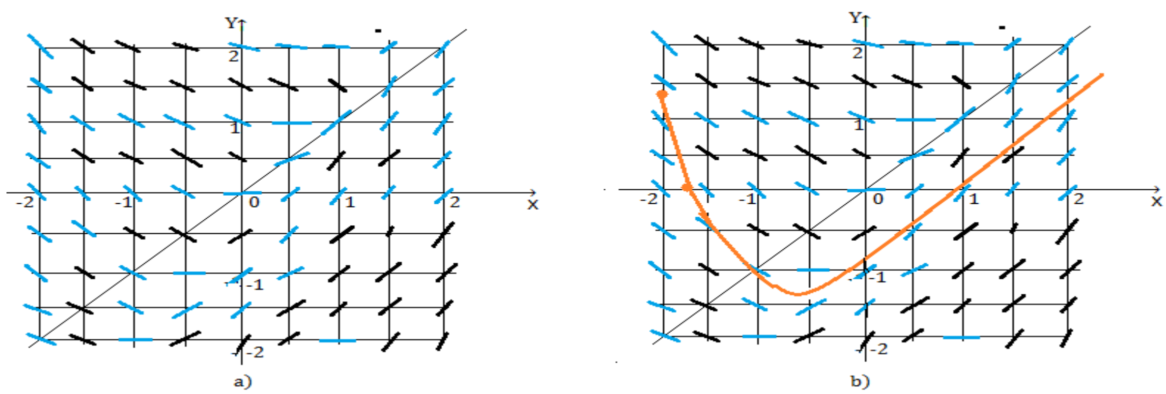

Fig.: No 2

El cálculo manual de un gran número de pendientes resulta tedioso, pero si se cuenta con medios computacionales para graficar funciones que realicen esta operación, se puede obtener un campo de direcciones con más detalles y exactitud. La ecuación diferencial dada $y' = 2x - y$, posee solución analítica exacta, la que será tratada con mayor profundidad más adelante, cuando se de tratamiento a los métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias.

Determinar un campo de direcciones para dar una solución gráfica aproximada a una ecuación diferencial resulta útil, cuando es imposible resolverla explícitamente.

Estabilidad en las ecuaciones diferenciales.

Es importante conocer si el problema que se va a resolver es estable o inestable, de ello dependerá de qué tan grandes son los errores que pueden permitirse en los datos iniciales o en el transcurso de la solución.

En el campo de las ecuaciones diferenciales, se considerará que el problema de Cauchy ($\boxed{5}$), será inestable si pequeños cambios en y_0 producen grandes cambios en la solución de la ecuación para valores de x alejados de x_0.

Una ecuación diferencial será inestable en cierta región del plano XY si sus soluciones presentan un comportamiento divergente a medida que "x" crece, figura No 3 a, mientras que será estable cuando sus soluciones tienden a agruparse a medida que x crece, figura No 3 b.

a) b)

Fig. No 3

La convergencia o divergencia de las soluciones de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$, y su estabilidad o inestabilidad dependen de la forma en que varía $f(x,y)$ en la región considerada del plano XY.

Si para una "x" fija aumenta con "y", ello significa que en la dirección vertical el campo de direcciones aumenta su pendiente al crecer "y", lo que indica que las soluciones divergen en esa región. En este caso, será positiva la derivada parcial de f respecto a y, o sea, $f_y(x,y) > 0$ y la ecuación diferencial será inestable, figura 4 a.

Si la derivada parcial de f respecto a y es negativa, o sea $f_y(x,y) < 0$, la pendiente del campo de direcciones decrece cuando "y" aumenta, las curvas convergen y se tratará de una ecuación diferencial estable, figura No 4 b.

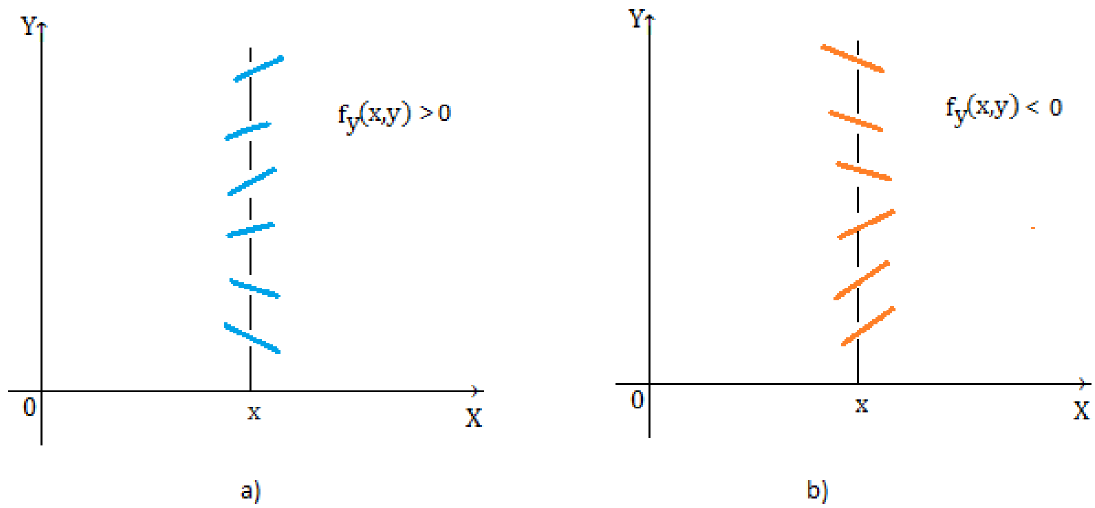

Fig. No 4

Ejemplo 4

Analizar la estabilidad de las siguientes ecuaciones diferenciales.

$a)\ y' = 2x - y \quad b)\ \frac{dy}{dx} = x^2 - y^2$

Respuesta:

$a)\ y' = 2x - y$

Se tiene que: $f(x,y) = 2x - y$ y si $f_y(x,y) = -1 < 0$, se trata de una ecuación diferencial estable.

$b)\ \frac{dy}{dx} = x^2 - y^2$

$f(x,y) = x^2 - y^2$, de donde: $f_y(x,y) = -2y$

Pero: $f_y(x,y) = -2y > 0$ si $y < 0$ y la ecuación diferencial será inestable.

y $f_y(x,y) = -2y < 0$ si $y > 0$ y la ecuación diferencial será estable.

Entonces, la estabilidad de la ecuación diferencial depende de la región, donde se tome el punto inicial.

Definición (2): (Método aproximado inestable)

- Se dice que un método aproximado para resolver el problema de Cauchy es inestable si presenta inestabilidad para una ecuación diferencial estable.

Para resolver el problema de Cauchy, existen dos tipos fundamentales de métodos numéricos: los métodos de un paso simple o de pasos aislados y los métodos de paso múltiple o de pasos ligados. Este material dedicará su estudio al primero de estos métodos.

Métodos numéricos para resolver aproximadamente las ecuaciones diferenciales. Métodos de paso simple

Los métodos numéricos para resolver el problema de Cauchy: $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$; $y(x_0) = y_0$ se basan en la idea de tomar un conjunto discreto de valores de x, tales como: $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ casi siempre uniformemente espaciados, y hallar valores $\{\widetilde{y_0}, \widetilde{y_1}, \widetilde{y_2}, \dots\}$ que se aproximen a los valores de la solución exacta del problema de Cauchy ($\boxed{5}$) y que se pueden escribir como: $\{y_0(x_0), y_1(x_1), y_2(x_2), \dots\}$.

<u>Nota:</u> En lo adelante se empleará la notación: $\widetilde{y_n}$ como el valor aproximado del valor exacto y_n.

Los algoritmos para hallar la solución aproximada $\{\widetilde{y_0}, \widetilde{y_1}, \widetilde{y_2}, \dots\}$ son siempre iterativos y pueden simbolizarse mediante una ecuación del tipo:

$$\widetilde{y_{n+1}} = G(\widetilde{y_n}, \widetilde{y_{n-1}}, \widetilde{y_{n-2}}, \dots, \widetilde{y_{n-k}}) \qquad (n \geq k) \quad \boxed{7}$$

El caso más sencillo, cuando $k = 0$, se expresa como:

$$\widetilde{y_{n+1}} = G(\widetilde{y_n}) \qquad (n \geq 0)$$

El método de Euler (estándar o clásico)

Este es el más elemental de los métodos de paso simple. Como se conoce el primer elemento (x_0, y_0) de la solución, se puede determinar el campo de direcciones en el punto $f(x_0, y_0)$. Leonard Euler (1707-1783), matemático suizo, fue alumno de Johannes Bernoulli, realizó sus trabajos en Francia, Alemania y Rusia, fue miembro de la Academia de Ciencias de Petersburgo, dio una definición general de las funciones exponenciales y logarítmicas, introdujo el símbolo "e" y publicó trabajos científicos sobre análisis, teoría de los números, ecuaciones diferenciales, mecánica y astronomía.

Como la pendiente del segmento $\overline{AC}$ es $f(x_0, y_0)$, figura No 5 a, entonces, según la fórmula punto-pendiente de la ecuación de la recta $y - y_0 = m(x - x_0)$ si $m = f(x_0, y_0)$ se obtiene:

$$y = y_0 + m(x - x_0) \qquad \text{y} \qquad \widetilde{y_1} = \widetilde{y_0} + f(x_0, \widetilde{y_0})(x - x_0)$$

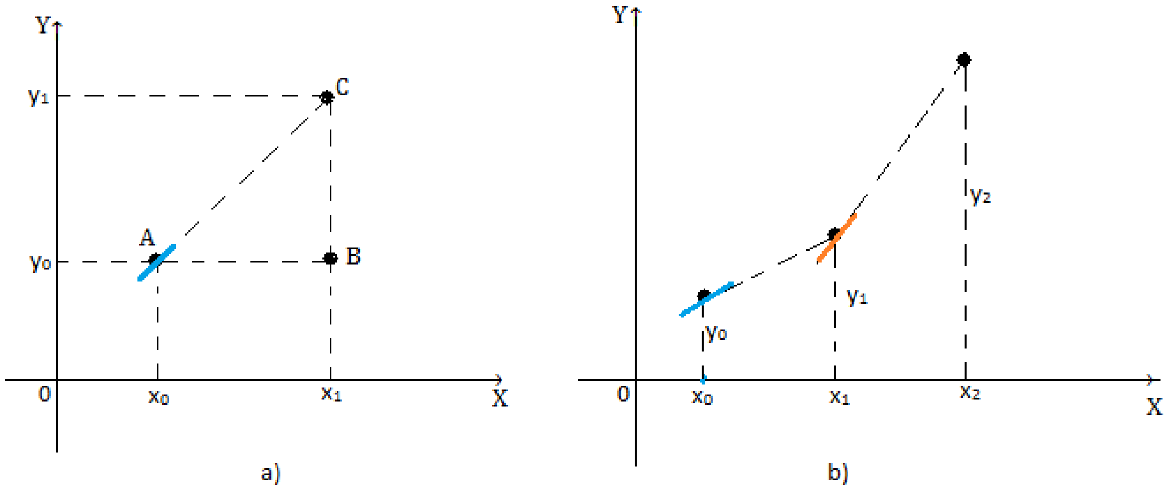

Fig.: No 5

Una vez conocido (x_1, y_1) se aplica la misma idea para determinar (x_2, y_2), figura No 5 b, suponiendo que $x_2 - x_1 = h$ resulta:

$\widetilde{y_2} = \widetilde{y_1} + f(x_1, \widetilde{y_1})(x_2 - x_1)$ $\qquad$ $\widetilde{y_2} = \widetilde{y_1} + hf(x_1, \widetilde{y_1})$

El procedimiento continúa hasta obtener la solución deseada.

Observaciones generales para el método de Euler

Sea la ecuación diferencial de primer orden $y' = f(x, y)$, con f continua que satisface la condición inicial: $y(x_0) = y_0$. Se supone que en el intervalo dado $x_0 \leq x \leq x_n$ se necesita hallar la solución de dicha ecuación diferencial.

Geométricamente, esto significa que para la ecuación diferencial hace falta construir una curva integral $y = y(x)$ que pase por el punto $M_0(x_0, y_0)$. Debido al sentido geométrico de la derivada se obtiene que en cada punto $M(x, y)$ de la curva integral su pendiente satisface la condición: $m = tan\ \alpha$.

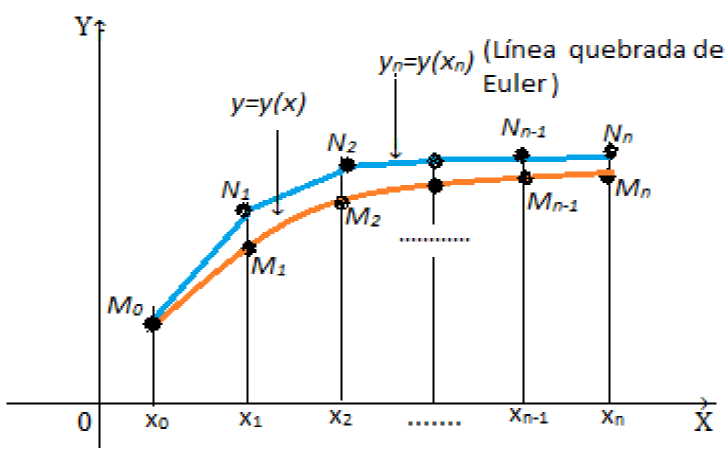

Fig. No 6

Como se supone que $f(x,y)$ es continua, se puede considerar que en un pequeño trozo de la curva su pendiente es constante, es decir, que esta curva puede ser reemplazada aproximadamente por la línea $M_0, N_1, N_2, \dots, N_n$, llamada ***línea quebrada de Euler***, figura 6.

Este procedimiento se efectúa dividiendo el segmento $[x_0, x_n]$ en partes suficientemente pequeñas, donde $h = x_{n+1} - x_n$, llamado paso de subdivisión, o simplemente, paso, y conociendo el número de divisiones "n" se determina mediante la expresión:

$$h = \frac{x_n - x_0}{n} \qquad \boxed{8}$$

En general, si se toma un paso h como incremento de la variable independiente, resulta para $n = 0, 1, 2, \dots$, las siguientes fórmulas:

$$x_{n+1} = x_n + h; \quad h = x_{n+1} - x_n; \quad h = \frac{x_n - x_0}{n}; \quad \widetilde{y_{n+1}} = \widetilde{y_n} + hf(x_n, \widetilde{y_n}) \qquad \boxed{9}$$

Nota: h puede tomar valores diferentes en cada aplicación de las fórmulas anteriores, aunque lo más conveniente es que sea constante.

Ejemplo 5:

Resolver la ecuación $y' - 2x + y = 0$ con la condición inicial: $y = -1$ para $x_0 = 0$, en el intervalo $[0; 1]$, mediante el método de Euler con pasos $h = 0,2$ y $h = 0,1$.

Respuesta:

Se pide hallar el valor aproximado de la solución de la ecuación diferencial dada para $x = 1$, que satisfaga la condición inicial $y_0 = -1$ cuando $x_0 = 0$.

Expresándola según el problema de Cauchy resulta:

$y' = 2x - y, \quad y(0) = -1; \quad f(x,y) = 2x - y$

Se sabe según el ejemplo 4 a, que es una ecuación diferencial estable, pues: $f_y = -1 < 0$.

Para hallar la solución general, se expresa primeramente como una ecuación diferencial de primer orden lineal: $y' + y.P(x) = Q(x)$

$y' + y = 2x, \quad (*)$ donde: $P(x) = 1$ y $Q(x) = 2x$

Su ecuación homogénea correspondiente o asociada es: $y' + y = 0$ y la solución general de esta se determina empleando la fórmula: $y = c.e^{-\int P(x)dx}$.

$y_{gh}(x) = c.e^{-\int 1.dx} = c.e^{-x}$

la solución particular de la no homogénea se puede determinar por variación de la constante de integración:

$y_p(x) = c(x)e^{-x} \quad (**)$

$y'_p(x) = c'(x).e^{-x} + c(x).e^{-x}.(-x)'$ (Derivando según la regla del producto)

$y´_p(x) = c´(x). e^{-x} - c(x). e^{-x}$

Sustituyendo en la ecuación diferencial lineal marcada con un $(*)$, para hallar $c(x)$:

$c´(x). e^{-x} - c(x). e^{-x} + c(x). e^{-x} = 2x$

$c´(x). e^{-x} = 2x$ (Simplificando)

$c´(x) = \frac{2x}{e^{-x}}$ (Despejando)

$\int c´(x)dx = \int \frac{2x}{e^{-x}} dx$ (Planteando la integral a ambos miembros)

$c(x) = 2\int xe^x dx$

Integrando, mediante la integración por partes, el miembro derecho:

Sean: $u = x$ $\quad v = e^x$

$du = 1. dx$ $\quad dv = e^x$

$2\int xe^x dx = 2[xe^x - \int e^x dx] + k = 2[xe^x - e^x] = 2e^x(x-1) + k \quad (k \in \mathbb{R})$

Aquí se ha utilizado a "k" como constante de integración para evitar confusión con "c". Entonces: $c(x) = 2e^x(x-1) + k$

Para $k = 0$, $c(x) = 2e^x(x-1)$

Sustituyendo en y_p marcada con $(**)$, para hallar la solución particular:

$y_p(x) = c(x)e^{-x} \quad \rightarrow \quad y_p(x) = 2e^x(x-1). e^{-x} = 2e^x. e^{-x}(x-1) = 2e^0(x-1) = 2(x-1)$

Para obtener la solución general, se emplea la fórmula $\boxed{3}$, sustituyendo en esta los resultados de la solución de la ecuación homogénea y de la particular, de esta forma resulta: $y(x) = ce^{-x} + 2(x-1)$.

Según la condición inicial: $y(0) = -1$, se obtiene el valor de "c" y la solución general exacta para dicha condición:

$-1 = c. e^0 + 2(0-1) \quad \rightarrow \quad c = 1$

$y(x) = e^{-x} + 2(x-1)$

Los valores exactos se determinan empleando la solución obtenida

$y(x) = e^{-x} + 2(x-1)$, la condición inicial: $y_0(0) = -1$ y $h = 0{,}2$.

Para: $x_0 = 0$, $y_0 = -1$ (Condición inicial)

Para: $x_1 = 0 + 0{,}2 = 0{,}2$ (Según la expresión: $x_{n+1} = x_n + h$)

$y_1 = e^{-0{,}2} + 2(0{,}2-1) = \frac{1}{e^{0{,}2}} + 2(-0{,}8) = \frac{1}{1{,}2214} - 1{,}6 = 0{,}8187 - 1{,}6 = -0{,}7813$

Para: $x_2 = 0{,}2 + 0{,}2 = 0{,}4$; $y_2 = \frac{1}{e^{0{,}4}} + 2(0{,}4-1) = \frac{1}{1{,}49182} + 2(-0{,}6) = -0{,}5297$

Para: $x_3 = 0{,}4 + 0{,}2 = 0{,}6$; $y_3 = \frac{1}{e^{0{,}6}} + 2(0{,}6-1) = \frac{1}{1{,}82211} + 2(-0{,}4) = 0{,}2512$

Para: $x_4 = 0{,}6 + 0{,}2 = 0{,}8$; $y_4 = \frac{1}{e^{0{,}8}} + 2(0{,}8-1) = \frac{1}{2{,}22554} + 2(-0{,}2) = 0{,}0493$

Para: $x_5 = 0{,}8 + 0{,}2 = 1{,}0$; $y_5 = \frac{1}{e} + 2(1-1) = \frac{1}{2{,}71828} = \boxed{0{,}3679}$

En el cálculo de los valores aproximados, mediante el método estándar de Euler, conviene retomar la ecuación según el problema de Cauchy y emplear las ecuaciones $\boxed{9}$. Los subintervalos con respecto a x se mantienen, así como el valor de $h = 0{,}2$ y se parte de la condición inicial.

Si $f(x,y) = 2x - y$ entonces: $f(x_n, y_n) = 2x_n - y_n$

Para: $x_0 = 0$, $y_0 = -1$ (Condición inicial)

Para: $x_1 = 0{,}2$ $\quad \widetilde{y_1} = \widetilde{y_0} + h[2x_0 - \widetilde{y_0}]$ (Según la fórmula $\boxed{9}$: $\widetilde{y_{n+1}} = \widetilde{y_n} + hf(x_n, \widetilde{y_n})$)

$\widetilde{y_1} = -1 + 0{,}2[2(0) + 1] = -1 + 0{,}2(1) = -0{,}8000$

Para $x_2 = 0{,}4$ $\quad \widetilde{y_2} = \widetilde{y_1} + h[2x_1 - \widetilde{y_1}]$

$\widetilde{y_2} = -0{,}8 + 0{,}2[2(0{,}2) + 0{,}8] = -0{,}8 + 0{,}2(1{,}2) = -0{,}8 + 0.24 = -0{,}5600$

Para $x_3 = 0{,}6$ $\quad \widetilde{y_3} = \widetilde{y_2} + hf(2x_2 - \widetilde{y_2})$

$\widetilde{y_3} = -0{,}56 + 0{,}2[2(0{,}4) + 0{,}56] = -0{,}56 + 0{,}272 = -0{,}2880$

Para $x_4 = 0{,}8$ $\quad \tilde{y_4} = \widetilde{y_3} + h[2x_3 - \widetilde{y_3}]$

$\tilde{y_4} = -0{,}288 + 0{,}2[2(0{,}6) + 0{,}288] = -0{,}288 + 0{,}2976 = 0{,}0096$

Para $x_5 = 1{,}0$ $\quad \widetilde{y_5} = \tilde{y_4} + h[2x_4 - \tilde{y_4}]$

$\widetilde{y_5} = 0{,}0096 + 0{,}2[2(0{,}8) - 0{,}0096] = 0{,}0096 + 0{,}31808 = \boxed{0{,}3277}$

Los resultados anteriores y el cálculo del error absoluto se muestran en la siguiente tabla, (Tabla No 2).

n	x_n	$Valor\ exacto$ $y_n(x_n)$	$Valor\ aprox.$ $\widetilde{y_n}(x_n)$	$Error$ $E = \lvert y_n - \widetilde{y_n} \rvert$
0	0	$-1{,}0000$	$-1{,}0000$	$0{,}0000$
1	0,2	$-0{,}7813$	$-0{,}8000$	$0{,}0187$
2	0,4	$-0{,}5297$	$-0{,}5600$	$0{,}0303$
3	0,6	$-0{,}2512$	$-0{,}2880$	$0{,}0368$
4	0,8	$0{,}0493$	$0{,}0096$	$0{,}0397$
5	1,0	$0{,}3679$	$0{,}3277$	$0{,}0402$

Tabla No 2

Se ha hallado el valor aproximado para $x = 1$, $\tilde{y}(1) = 0{,}3277$ y la solución exacta es $y(1) = 0{,}3679$, con un error absoluto $E(y) = 0{,}0402$.

El error relativo para estos cálculos, que se determina mediante el cociente del error absoluto y el valor exacto, se presenta como:

$e(y) = \frac{0{,}0402}{0{,}3679} = 0{,}109 \approx 0{,}11$, que expresado en % resulta: 11%.

Observaciones acerca de este ejercicio:

- Se aprecia como el error se va incrementando a medida que la solución progresa. Este comportamiento está relacionado con la estabilidad de la ecuación diferencial dada y del método que se emplee. En este caso, la ecuación $y' = 2x - y$ es estable.
- Si se realizaran los cálculos con un paso $h = 0{,}1$ (mitad del anterior), se obtendrían aproximaciones con errores también aproximadamente iguales a la mitad del anterior. Por ejemplo para $x = 1$, con paso $h = 0{,}2$ el error es de $0{,}0402$ y con paso $h = 0{,}1$ será $0{,}0191$ $(0{,}0402{:}\,2 = 0{,}0201 \approx 0{,}0191)$. E invita a los lectores interesados que lo realicen.
- El error relativo con paso $h = 0{,}1$ será de un $5{,}2\%$, menor que el obtenido con paso $h = 0{,}2$, por lo que se considera que se obtiene una mejor aproximación cuanto menor sea el valor del paso h, aunque esto presupone una mayor cantidad de iteraciones.

La figura 7 muestra el gráfico de la función $y(x) = e^{-x} + 2(x-1)$, que es la solución exacta de la ecuación diferencial $y' = 2x - y$, para un valor de $c = 1$. Obsérvese que la curva obtenida en el campo de pendientes (figura.2 b), se asemeja lo suficiente a la obtenida mediante el programa graficador Graphmatica, figura 7. Y para $x = 1$ las imágenes están próximas a $y = 0{,}3$ (valor aproximado de la solución).

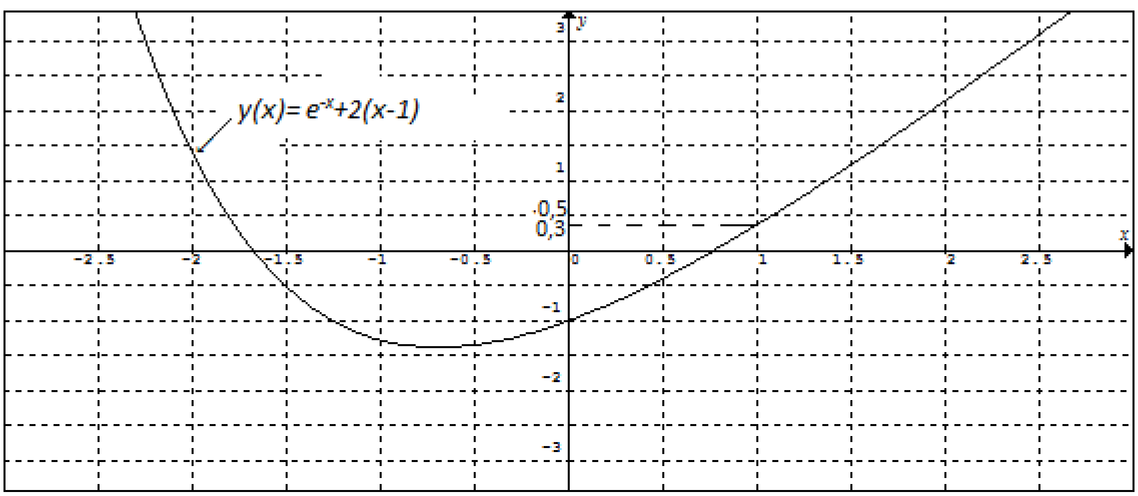

Fig.: No. 7

En los ejemplos anteriores, se determinaron los errores de aproximación mediante las fórmulas iniciales conocidas de los valores absolutos de las diferencias entre los valores exactos y los aproximados; sin embargo, el método de Euler requiere un análisis más detallado del comportamiento del error.

El método de Euler posee un error local de orden $0(h^2)$ y un error total de orden $0(h)$, por ello se plantea que es de orden uno.

Ventajas y desventajas del método de Euler

Después del estudio del método estandar o clásico de Euler, para resolver el problema de Cauchy, se precisan algunas desventajas:

- Poca precisión cuando el paso h es grande.
- Realización de muchos cálculos cuando el paso h es pequeño.
- Acumulación sistemática de errores.

A pesar de estas desventajas, sirve de base para otros métodos más perfectos (o mejorados) de solución aproximada de ecuaciones diferenciales.

Algunas aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de primer orden

Una de las aplicaciones más importantes del Cálculo Diferencial es la teoría sobre las ecuaciones diferenciales. Cuando los científicos de las ciencias exactas, naturales o sociales realizan una investigación de la cual surge como modelo una ecuación diferencial, si bien, no siempre se puede hallar una fórmula explícita para la solución de la ecuación diferencial habrá algún procedimiento gráfico y numérico que proporcione su solución.

Al definir el proceso de modelado, se habló acerca de formular un modelo matemático de un problema del mundo real a través de razonamientos acerca del mismo a partir de leyes y evidencias de la experimentación. En un problema del mundo real, con frecuencia se advierte que ocurren cambios y se necesita predecir el comportamiento futuro sobre la base de cómo cambian los valores actuales. En casos como estos el modelo matemático se expresa como una ecuación diferencial, es decir, una ecuación en la que se relacionan una función desconocida, las variables y algunas de las derivadas de la función en un conjunto dado.

En otras palabras, las ecuaciones diferenciales constituyen un aparato matemático con ayuda del cual podemos estudiar los fenómenos que se desarrollan en la naturaleza. Si los datos del problema definen enteramente un fenómeno, este debe desarrollarse de modo unívoco, es decir, la solución de la ecuación diferencial, que determina la ley del desarrollo del fenómeno, debe ser única. La solución general de la ecuación diferencial contiene constantes arbitrarias y, por consiguiente, no da respuesta determinada a la cuestión planteada. Por eso, para resolver problemas concretos las ecuaciones diferenciales, deben ser completadas por condiciones suplementarias. En el caso más simple, estas son las condiciones iniciales que conducen al problema de Cauchy.

A continuación, se citarán algunos de los problemas que se pueden presentar y cuya solución conduce a modelar una ecuación diferencial.

- Si la pendiente de la recta tangente a una curva en cualquier punto (x, y) de la curva es m, hallar la ecuación de la curva que contiene al punto (x_0, y_0) conduce a la ecuación: $\frac{dy}{dx} = m$ con $y(x_0) = y_0$.

- La velocidad de crecimiento de una población P en un instante de tiempo $t,$ prescindiendo de algunos parámetros o en condiciones ideales, está dada por la $\frac{dP}{dt}$.
- La variación de la temperatura T de un cuerpo en un instante de tiempo $t,$ relacionada con la temperatura ambiente, se expresa como: $\frac{dT}{dt}$.

A continuación se expondrá el segundo de los problemas planteados que conducen a una ecuación diferencial.

Uno de los problemas del mundo real que despierta gran interés por parte de los investigadores y que se resuelve mediante la modelación de una ecuación diferencial es el del crecimiento de una población de individuos, de una determinada especie, en un intervalo de tiempo, por lo que se le dará un tratamiento más amplio.

Uno de los modelos para determinar el crecimiento de una población P se basa en la hipótesis de que la población crece con una rapidez, con respecto al tiempo, proporcional a su tamaño, y se expresa mediante la derivación como:

$$\frac{dP}{dt} = kP \qquad \boxed{10}$$

Según esta igualdad resulta razonable que la razón o tasa de crecimiento sea proporcional al tamaño de la población. La misma hipótesis se aplica en otras situaciones, como por ejemplo:

- En Física nuclear, la masa de una sustancia radioactiva disminuye a una razón proporcional a la masa.
- En Química, la velocidad de una reacción unimolecular de primer orden es proporcional a la concentración de la sustancia.
- En Finanzas, el valor de una cuenta de ahorros, con interés compuesto de manera continua, crece con una razón proporcional a ese valor.

En general, si $y(t)$ es el valor de una cantidad "y" en un instante "t" y si la razón de cambio "y" con respecto a "t" es proporcional a su magnitud $y(t)$ en cualquier instante, entonces:

$$\frac{dy}{dt} = ky \qquad (k \text{ constante}) \qquad \boxed{11}$$

Esta ecuación recibe el nombre de ley de crecimiento natural si $k > 0,$ o bien, ley de desintegración natural si $k < 0$.

La ecuación $\boxed{11}$ se puede expresar de la forma: $y' = ky$ o bien, $y' - ky = 0$, sabiendo que y depende de t y que al ser resuelta por separación de variables o como una ecuación lineal su solución general resulta: $y = A.e^{kt}$.

La hipótesis que da origen a la ecuación $\boxed{10}$ o a su equivalente $\boxed{11}$, de que la población crece con rapidez proporcional a su tamaño es válida en condiciones ideales como pueden ser: medio ambiente adecuado, nutrición adecuada, ausencia de depredadores, inmunidad ante las enfermedades u otras.

Identificando las variables de estos modelos $\frac{dP}{dt} = kP$ o $\frac{dy}{dt} = ky,$ resulta:

t: tiempo (como variable independiente)

P: cantidad de individuos de la población (como variable dependiente)

k: constante de proporcionalidad.

Observaciones:

- Se descarta una población $P(t) = 0,$ entonces $P(t) > 0$ para todo valor de t.
- Si $k > 0$ entonces la ecuación diferencial muestra que $P'(t) > 0$ para todo valor de t e indica que la población crece siempre.
- A medida que $P(t)$ aumenta, la ecuación diferencial muestra que $\frac{dP}{dt}$ se hace más grande, o sea, la tasa de crecimiento aumenta al incrementarse la población.

Una solución para la ecuación $\boxed{11}$ se expresó anteriormente como $y = A.e^{kt}$ la que en los términos anteriores se puede plantear como:

$$P(t) = c.e^{kt} \qquad \boxed{12}$$

En este caso, la ecuación diferencial pide hallar una función cuya derivada sea un múltiplo constante de ella. Las funciones exponenciales tienen esa propiedad:

$P'(t) = c.e^{kt}.(kt)' = c.k.e^{kt} = k(c.e^{kt}) = k.P(t)$

La solución general brinda una familia de soluciones como las que ilustra la figura No 8 a. Ahora bien, como las poblaciones solo tienen valores positivos solo interesan las soluciones con $c > 0$ y $t \geq 0$ con $t = 0$ como instante inicial de tiempo. La figura No 8 b muestra la familia de soluciones con estas últimas condiciones.

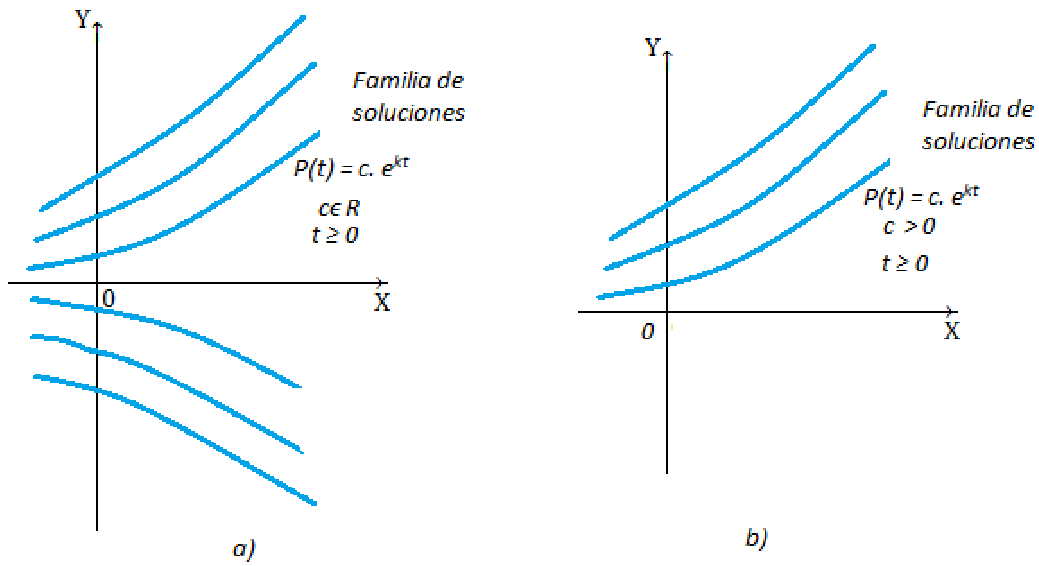

Fig. No. 8

Para las soluciones con significado físico con $t = 0$, se obtienen mediante la sustitución: $P(0) = c.e^{k(0)} = c$, de modo que la constante c resulta ser la población inicial $P(0) = P_0$.

Debido a que la ecuación modelo $\frac{dP}{dt} = kP$ o $\frac{dy}{dt} = ky$, se presenta con gran frecuencia en la naturaleza al resolverla como el problema de Cauchy, conviene expresar su solución indistintamente como:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = ky \quad y(0) = y_0 \\ \quad y(t) = y_0.e^{kt} \end{cases} \quad \text{o bien:} \quad \begin{cases} \frac{dP}{dt} = kP \quad P(0) = P_0 \\ \quad P(t) = P_0.e^{kt} \end{cases} \qquad \boxed{13}$$

Significado de la constante de proporcionalidad

En las expresiones tratadas anteriormente el valor de k representa la constante de proporcionalidad relacionada con el crecimiento de la población. Según $\boxed{13}$, la solución de la ecuación $\boxed{12}$ se expresa como $P(t) = P_0.e^{kt}$, donde k es el coeficiente de t en la forma exponencial. Estas relaciones se pueden ilustrar, si por ejemplo, se tiene que: $\frac{dP}{dt} = 0{,}03$ y t se mide en años, entonces la tasa relativa de crecimiento es $k = 0{,}03$; lo que indica que la población aumenta en un $3\,\%$ cada año. Si la población en un tiempo $t_0 = 0$ es P_0, entonces la expresión para la población, según $\boxed{13}$ es: $P(t) = P_0.e^{0{,}03t}$.

Ejemplo 6:

Al finalizar el siglo XX, la población mundial llegó aproximadamente a los 6 mil millones de habitantes, reflejada en la tabla No 3, merece entonces un análisis del crecimiento bajo la suposición de que la tasa de crecimiento es proporcional al tamaño de la población. Use los datos de la tabla para modelar la población del mundo en el siglo XX.

Años	1900	1910	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990	2000
Población en millones de hab.	1650	1750	1860	2070	2300	2520	3020	3700	4450	5300	6000

Tabla No. 3

a) ¿Cuál es la tasa relativa de crecimiento y cuán bien se ajusta el modelo a los datos. Emplee el método de Euler para realizar las comparaciones con las soluciones exactas? Se recomienda el uso de tablas de funciones exponenciales y logarítmicas o de medios electrónicos de cálculo.

Respuesta:

a) Sea t el tiempo en años, $P(t)$ la población en miles de millones de personas, se toma $t_0 = 0$ en el año 1900 entonces la condición inicial es $P(0) = 1650$.

Según lo supuesto, se cumple según $\boxed{13}$ que:

$\frac{dP}{dt} = k.P$ y $P(0) = 1650$, entonces la solución sería: $P(t) = 1650.e^{kt}$

Una manera de estimar la tasa relativa de crecimiento "k", puede ser emplear el dato conocido de que la población en 1910 era de 1750 millones, o sea, la población de los diez primeros años del siglo XX, luego resulta:

$P(10) = 1750 \quad \rightarrow \quad P(10) = 1650.e^{k(10)} = 1750 \quad \rightarrow \quad e^{10k} = \frac{1750}{1650}$ (Despejando)

$\ln e^{10k} = \ln \frac{1750}{1650}$ (Aplicando logaritmo a ambos miembros)

$10k\,.\ln e = \ln 1{,}0606 \quad \rightarrow \quad k = \frac{1}{10}.\ln 1{,}0606 \quad \rightarrow \quad k = 0{,}1.0{,}05883 \quad \rightarrow \quad k = 0{,}005883$

De donde, la tasa de crecimiento poblacional se comportó aproximadamente en $k \approx 0{,}006$ o bien: $0{,}6\%$ por año y el modelo queda entonces:

$P(t) = 1650.e^{0{,}005883.t}$ (Modelo I)

Con este modelo, la población se pudo predecir con los siguientes resultados:

Para el año 1910:

$P(10) = 1650.e^{0{,}005883.(10)} = 1650.e^{0{,}05883} \approx 1650.e^{0{,}06} = 1650.1{,}0618 = 1751{,}97$

Por lo que la población, para este año, se predijo que aumentaría aproximadamente en 1752 millones de habitantes. De forma similar, se hallan las predicciones para las restantes décadas, empleando el modelo I.

Para: 1920, $P(20) \approx 1860$, para: 1930, $P(30) \approx 1975$,

Para: 1940, $P(40) \approx 2098$, para: 1950, $P(50) \approx 2205$,

Para: 1960, $P(60) \approx 2342$, para: 1970, $P(70) \approx 2486$,

Para: 1980, $P(80) \approx 2640$, para: 1990, $P(90) \approx 2803$

Y para el año 2000 este modelo predijo una población aproximada de 3006 millones de habitantes.

Para el empleo del método de Euler, conviene expresar la situación dada según el problema de Cauchy:

Si: $\frac{dP}{dt} = k.P$, entonces $f(t;\, P)$ depende solo de P y se expresa como: $f(P) = k.P$, empleando la aproximación para k, resulta: $f(P_n) = 0{,}006.P$.

Se toma: $t_0 = 0$, $P_0(0) = 1650$ y paso $h = 10$.

Para: $t_0 = 0$, $P_0(0) = 1650$ (Condición inicial)

Para: $t_1 = t_0 + h = 0 + 10 = 10$,

$\tilde{P}_1 = P_0 + hf(t_0;\, P_0)$ (Según fórmulas $\boxed{4.15}$ del método de Euler)

$f(t_0;\, P_0) = f(10; 1650) = 0{,}006.(1650) = 9{,}9 \rightarrow P_1 = 1650 + 10.(9{,}9) = 1749$

Para: $t_2 = 20$, $\widetilde{P_2} = \tilde{P}_1 + hf(t_1; \tilde{P}_1)$

$f(t_1;\, \tilde{P}_1) = f(20; 1749) = 0{,}006.(1749) = 10{,}5 \rightarrow \widetilde{P_2} = 1749 + 10.(10{,}5) = 1854$

Para: $t_3 = 30$, $\widetilde{P_3} = \widetilde{P_2} + hf(t_2;\, \widetilde{P_2})$

$f(t_2;\, \widetilde{P_2}) = f(20; 1854) = 0{,}006.(1854) = 11{,}1 \rightarrow \widetilde{P_3} = 1854 + 10.(11{,}1) = 1965$

Para: $t_4 = 40$, $\widetilde{P_4} = \widetilde{P_3} + hf(t_3;\, \widetilde{P_3})$

$f(t_3;\, \widetilde{P_3}) = f(30; 1965) = 0{,}006.(1965) = 11{,}8 \rightarrow \widetilde{P_4} = 1965 + 10.(11{,}8) = 2083$

Para: $t_5 = 50$, $\widetilde{P_5} = \widetilde{P_4} + hf(t_4;\, \widetilde{P_4})$

$f(t_4;\, \widetilde{P_4}) = f(40; 2083) = 0{,}006.(2083) = 12{,}5 \rightarrow \widetilde{P_5} = 2083 + 10.(12{,}5) = 2208$

Para: $t_6 = 60$, $\widetilde{P_6} = \widetilde{P_5} + hf(t_5;\, \widetilde{P_5})$

$f(t_5;\, \widetilde{P_5}) = f(50; 2208) = 0{,}006.(2208) = 13{,}2 \rightarrow \widetilde{P_6} = 2208 + 10.(13{,}2) = 2340$

Para: $t_7 = 70$, $\widetilde{P_7} = \widetilde{P_6} + hf(t_6;\, \widetilde{P_6})$

$f(t_6;\, \widetilde{P_6}) = f(60; 2340) = 0{,}006.(2340) = 14 \rightarrow \widetilde{P_7} = 2340 + 10.(14) = 2480$

Para: $t_8 = 80$, $\widetilde{P_8} = \widetilde{P_7} + hf(t_7;\, \widetilde{P_7})$

$f(t_7;\, \widetilde{P_7}) = f(70; 2480) = 0{,}006.(2480) = 14{,}9 \rightarrow \widetilde{P_8} = 2480 + 10.(14{,}9) = 2629$

Para: $t_9 = 90$, $\widetilde{P_9} = \widetilde{P_8} + hf(t_8;\, \widetilde{P_8})$

$f(t_8;\, \widetilde{P_8}) = f(80; 2629) = 0{,}006.(2629) = 15{,}8 \rightarrow \widetilde{P_9} = 2629 + 10.(15{,}8) = 2787$

Para: $t_{10} = 100$, $\widetilde{P_{10}} = \widetilde{P_9} + hf(t_9;\, \widetilde{P_9})$

$f\left(t_9;\ \widetilde{P_9}\right) = f(90; 2787) = 0{,}006.(2787) = 16{,}7 \ \rightarrow \ \widetilde{P_{10}} = 2787 + 10.(16{,}7) = 2954$

Los resultados obtenidos con la solución general y con el método de Euler se muestran en la tabla No 4 .

Años	*Población en millones de habitantes*	*Resultados con el Modelo I*	*Resultados con el m. de Euler*
1900	1650	1650	1650
1910	1750	1752	1749
1920	1860	1860	1854
1930	2070	1975	1965
1940	2300	2098	2083
1950	2520	2205	2208
1960	3020	2342	2340
1970	3700	2486	2480
1980	4450	2640	2629
1990	5300	2803	2787
2000	6000	3006	2954

Tabla No 4

Los resultados alcanzados con la solución general (Modelo I) y con el método de Euler son valores aproximados más cercanos entre sí, no así al compararlos con los resultados reales, pues las predicciones se mostraron muy inexactas. Obsérvese que se trata de un modelo bajo condiciones ideales y de una ecuación diferencial inestable. La ventaja del empleo del método de Euler consiste en que se trabaja directamente con la ecuación diferencial y no requiere calcular integrales, ni del empleo de tablas de funciones exponenciales y logarítmicas, salvo para determinar la constante k.

Otra posibilidad de estimar el valor de k sería utilizar la población de 1950 en lugar de la de 1910, o sea:

$P(50) = 1650.e^{50.k} = 2520 \quad \rightarrow \quad k = \frac{1}{50}.ln\frac{2520}{1650} = 0{,}008470$ (Según $\boxed{13}$)

El modelo ahora resulta ser: $P(t) = 1650.e^{0{,}00847t}$ (Modelo II)

Los estimados para las poblaciones con este modelo se hallan de forma similar al modelo I; sin embargo, este segundo modelo exponencial es más exacto en los primeros años cercanos a 1950, pero en años próximos a finales del siglo XX va demasiado atrás a la realidad, tal es así que, con este modelo la población para el año 2000 se predijo como:

$$P(100) = 1650.e^{0,008470.(100)} = 1650.e^{0,847} \approx 1650.e^{0,85} \approx 1650.2,3396 \approx 3860,34$$

Este resultado es superior al obtenido con el modelo I, pero aun difiere del valor real en más de 2000 mil millones de habitantes. Por lo que resulta útil hallar otra expresión para modelar la población en la segunda mitad el siglo XX y emplear dicho modelo para estimar, por ejemplo, las poblaciones de los años 2000 y 2015 y predecir la del 2030 considerando que se mantienen las mismas condiciones ideales.

En la búsqueda de un tercer modelo, se tomará como $t_0 = 0$ en 1950, entonces el problema con condiciones iniciales es:

$\frac{dP}{dt} = k.P, \quad P(0) = 2520$ y la solución para esta ecuación es: $P(t) = 2520.e^{k.t}$ (Según $\boxed{13}$)

Para hallar el valor de k, se empleará la población real de 1960.

$$P(10) = 2520.e^{10k} = 3020 \rightarrow k = \frac{1}{10}.\ln\frac{3020}{2520} = 0,1.\ln 1,1984 \approx 0,1.0,1810 \approx 0,0181$$

Este resultado indica que la tasa relativa de crecimiento es alrededor de $1,8\%$ por año y el modelo resultante es:

$P(t) = 2520.e^{0,0181.t}$ (Modelo III)

Al tomar $t_0 = 0$ en 1950, el modelo III brinda la posibilidad de estimar la población en los últimos 50 años del siglo XX.

Para 1960: $P(10) = 2520.e^{0,0181.(10)} \approx 2520.e^{0,2} \approx 2520.1,2214 \approx 3077,9 \approx 3078$

Para 1970: $P(20) = 2520.e^{0,0181.(20)} \approx 2520.e^{0,36} \approx 2520.1,4333 \approx 3611,9 \approx 3612$

Para 1980: $P(30) = 2520.e^{0,0181.(30)} \approx 2520.e^{0,54} \approx 2520.1,7160 \approx 4324,32 \approx 4324$

Para 1990: $P(40) = 2520.e^{0,0181.(40)} \approx 2520.e^{0,72} \approx 2520.2,0544 \approx 5177,1 \approx 5177$

Este modelo predice que la población en el año 2000 sería de:

$$P(50) = 2520.e^{0,0181.(50)} = 2520.e^{0,905} \approx 2520.e^{0,91} \approx 2520.2,4843 \approx 6260,4$$

Este resultado estima una población aproximada de 6260 millones de habitantes, valor muy cercano a la población real de este año.

Para el año 2015, este modelo se expresa como:

$$P(65) = 2520.e^{0,0181.(65)} = 2520.e^{1,1765} \approx 2520.e^{1,18} \approx 2520.3,2544 \approx 8201$$

Este valor está muy cercano a la población mundial de 2022 de 8000 millones de habitantes.

Pese a lo arriesgado de la fórmula, pues se trata de un modelo ideal, al predecir la población que habrá en el 2030 se obtiene:

$$P(80) = 2520.e^{0,0181.(80)} = 2520.e^{1,448} \approx 2520.e^{1,45} \approx 2520.4,2531 \approx 10717,8$$

Según este modelo, la población mundial sobrepasará los 10 mil millones de habitantes para el año 2030. Se sugiere a los lectores emplear el método de Euler o cualquier otro método numérico para estimar la población desde 1950 hasta 2030 y comparar que tan eficiente es la estimación que se pueda realizar.

La tabla No 5 muestra los resultados obtenidos al aplicar los tres modelos aplicados para estimar la población mundial en el siglo XX y una representación gráfica aproximada en la que se aprecia que el modelo III está más cerca de los resultados reales, aparece en la figura No 5. Por lo que es razonable pensar que el modelo, para estimar el crecimiento de una población, debe tomarse lo más cercano en el tiempo que se desea predecir.

Años	*Población en millones de habitantes*	*Resultados con el Modelo I*	*Resultados con el Modelo II*	*Resultados con el Modelo III*
1900	1650	1650	1650	1650
1910	1750	1752	1796	1796
1920	1860	1860	1955	1955
1930	2070	1975	2127	2127
1940	2300	2098	2315	2315
1950	2520	2205	2520	2520
1960	3020	2342	2743	3078
1970	3700	2486	2985	3612
1980	4450	2640	3249	4324
1990	5300	2803	3536	5177
2000	6000	3006	3860	6260

Tabla No 5

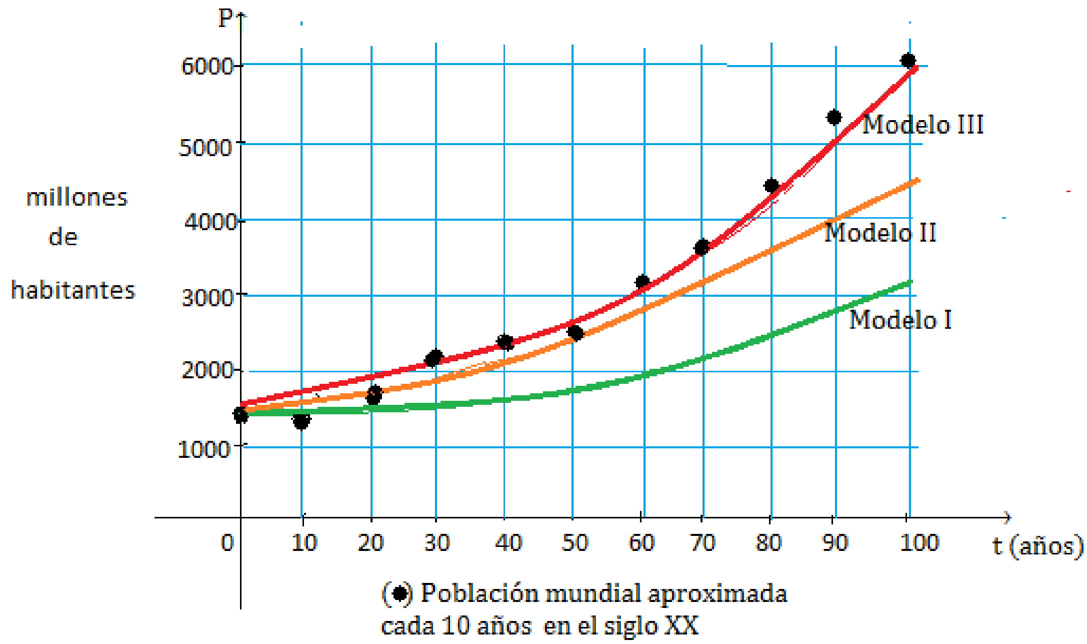

Fig. No 9

Conclusiones

La Matemática Numérica comprende, entre otros procedimientos, los métodos numéricos para resolver ejercicios y problemas que por los métodos exactos sería difícil o hasta imposible de resolver. No obstante queda clara la unidad dialéctica entre los métodos exactos y numéricos que brinda la Matemática al permitir la complementación de ambos métodos, el primero da el marco teórico necesario y el segundo las fórmulas y procedimientos para resolverlos.

La Matemática Numérica posee valor práctico para resolver problemas de la ciencia, la técnica, la economía y la sociedad en general y ofrece métodos didácticos de autoaprendizaje para el cálculo aproximado, la representación de funciones, la derivación e integración de funciones, la resolución de ecuaciones, entre las que se incluyen las ecuaciones diferenciales, entre otras situaciones matemáticas.

Una de las aplicaciones más importantes del Cálculo Diferencial es la teoría sobre las ecuaciones diferenciales. Las ecuaciones diferenciales constituyen un aparato matemático con ayuda del cual podemos estudiar los fenómenos que se desarrollan en la naturaleza. Los métodos numéricos dan solución a problemas del mundo real, que con frecuencia se advierte que ocurren cambios y se necesita predecir el comportamiento futuro sobre la base de cómo cambian los valores actuales.

Es difícil prever de antemano el futuro de un campo cuyo avance depende del desarrollo tecnológico, nuevos problemas aparecerán conforme se creen nuevas tecnologías. Es de esperar, por ejemplo, que el cambio climático, la astronomía, que continua siendo una fuente inagotable de problemas abiertos y el desarrollo de nuevos materiales, entre otros temas, demandan de métodos numéricos más precisos que aprovechen la capacidad computacional. Asimismo se espera que la Matemática numérica se vuelva una herramienta indispensable en la biología, la farmacología la estadística social, la medicina entre otras ramas de la ciencia.

Con la teoría y ejemplos expuestos se aprecia el incalculable valor de los métodos de solución de ecuaciones diferenciales como una herramienta para resolver ejercicios y problemas de la ciencia, la técnica, la economía y la sociedad.

Bibliografía

Álvarez, M. y Guerra, A. (2004). *Matemática numérica*. La Habana, Cuba: Félix Varela.

Ayres, F. (1975).*Cálculo Diferencial e Integral. Teoría y problemas*. La Habana, Cuba: Pueblo y Educación.

Baldor, A. (sin año).*Aritmética*. La Habana, Cuba: Culturales. S.A.

Botelo, S. (2003*).Ejemplos de aplicación de los métodos numéricos a problemas de ingeniería*. Ciudad México, México: CIMAT.

Bugrov, Ya.S. y Nikolski S.M.(1985). *Matemáticas superiores*. Moscú, URSS: Mir.

Claro, M. S. (2003).*Matemática superior, partes 1 y 2*. La Habana, Cuba: Félix Varela. (ISBN: 959-258-453-2, obra completa).

Conde, C,(2017) "*Programación y métodos numéricos",* http://ocw.upm.es/matematica-aplicada/programacion-y-metodos-numericos/contenidos/TEMA_5/Apuntes/Derivacion_OCW.pdf, Madrid España.

Danílina, N.I y Dubróvskaya, N.S. (1990). *Matemática de Cálculo*. Moscú, URSS: Mir.

Efímov, A y Demidovich, B. (1983). *Problemas de las matemáticas superiores*. Tomos I, II y III. Moscú, URSS: Mir.

Galiana, T. (1988). *Pequeño Larousse de ciencias y técnicas.* La Habana, Cuba: Editorial científico-técnica.

Jiménez, M, H. (2010). *Análisis Matemático en R.* La Habana, Cuba: Pueblo y Educación.(ISBN: 978-959-13-2063-6)

Kudriávtsev, L.D. (1983).*Curso de Análisis Matemático*. Tomos 1 y 2. Moscú, URSS: Mir.

Kudriávtsev, L.D. y Demidovich, B. (1989). *Breve curso de Matemáticas superiores*. Moscú, URSS: Mir.

Muto, V. (2006).*Curso de métodos numéricos*. País Vasco, España.

Nieves, A (2014). *Métodos numéricos aplicados a la ingeniería*. Ciudad México, México: Patria.

Piskunov, N. (1980). *Cálculo Diferencial e Integral, tomos I y II.* Moscú, URSS: Mir.

Ríbnikov, K. (1991).*Historia de las matemáticas*. Moscú, URSS: Mir. (ISBN:5-03-001912-X)

Saavedra, P. (1996).*Matemática numérica*. Ciudad México, México: Publicaciones SMM.

Stewart, J. (2011). *Cálculo con trascendentes tempranas, partes 1, 2, 3 y 4*. La Habana, Cuba. (ISBN: 978-959-13-2415-3, obra completa).

Suárez, M. (1988).*Matemática Numérica*. La Habana, Cuba: Libros para la educación.

Sydsaeter, K. y Hammond, P, J.(2003). *Matemáticas para el análisis económico, volúmenes 1 y 2.* La Habana, Cuba: Félix Varela.

Programa Informático Derive. Universidad de Valencia. España.