



## CAPÍTULO III

# Señal exponencial compleja y series de Fourier

El análisis en series de Fourier se enfoca en señales periódicas y utiliza como base la señal exponencial compleja. Para lo cual, en este capítulo, repasaremos las señales exponenciales, y conoceremos cómo expresar señales básicas (ej. senoidal, cuadrada periódica) en términos de la suma de exponenciales complejas relacionadas armónicamente.

Al finalizar el capítulo, deberás estar en capacidad de:

1. Explicar por qué la Serie de Fourier (SF) utiliza la señal exponencial compleja, y no la señal exponencial real.
2. Calcular la SF de señales senoidales o cosenoidales aplicando la ecuación de Euler y el concepto de armónica.
3. Escribir código en Python para dibujar señales senoidales o cosenoidales, así como sus coeficientes de la SF.
4. Explicar el fenómeno de Gibbs.
5. Explicar las condiciones de Dirichlet y su relación con la existencia de la Serie de Fourier.
6. Calcular la SF de señales periódicas aplicando la ecuación de análisis y/o propiedades de la SF.
7. Escribir código en Python para calcular y dibujar la SF de la suma de señales senoidales o cosenoidales.

### 3.1. SEÑAL EXPONENCIAL

La Serie de Fourier se basa en la señal exponencial compleja; por esta razón, iniciaremos este capítulo con un breve recordatorio de los diferentes tipos de señales exponenciales.

#### 3.1.1. Señal exponencial continua real

Esta señal se define matemáticamente como:

$$x(t) = Ae^{\alpha t} \text{ donde } A, \alpha \in \mathbb{R}$$

Por ejemplo, consideremos la señal exponencial  $x(t) = 2e^{t/2}$ ,

donde  $A = 2$ , y  $\alpha = 1/2$ .

Este tipo de señales exponenciales puede ser creciente o decreciente, dependiendo del valor de  $\alpha$ . Si  $\alpha < 0$ , la señal exponencial es decreciente; mientras que, si  $\alpha > 0$ , la señal exponencial es creciente.

Sin embargo, en ambos casos, este tipo de señales no es periódica, es decir, no se cumple que  $x(t) = x(t + T)$ .

A continuación, estudiaremos a la señal exponencial compleja.

#### 3.1.2. Señal exponencial continua compleja

Esta señal se representa de la siguiente forma:

$$x(t) = Ae^{j\omega t} \text{ donde } A \in \mathbb{R}$$

Por simplicidad, y para facilitar el desarrollo matemático que veremos a continuación, asumiremos que  $A = 1$  (sin pérdida de generalidad, ya que el valor de  $A$  solo escala la señal).

A diferencia del caso anterior, este tipo de señales exponenciales sí es periódica, lo que significa que se repite con un período fundamental  $T_0$ , el cual se obtiene a partir de la frecuencia angular fundamental  $\omega_0$ , así:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

El periodo fundamental,  $T$ , se expresa en unidades de segundos [s]; mientras que, la frecuencia angular fundamental  $\omega_0$  en [rad/s].

Ahora, vamos a relacionar la señal exponencial continua con la señal cosenoidal y senoidal. Para ello, utilizamos la fórmula de Euler:

$$e^{j\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + j\text{sen}(\omega_0 t)$$

Donde se obtiene que:

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2} \{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\}$$

Y,

$$\text{sen}(\omega_0 t) = \frac{1}{2j} \{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}\}$$

De esta forma:

$$\cos(\omega_0 t) = \mathbb{R}\{e^{j\omega_0 t}\}$$

$$\text{sen}(\omega_0 t) = \mathbb{I}\{e^{j\omega_0 t}\}$$

Existen dos diferencias importantes entre la representación de la señal cosenoidal y la señal senoidal:

1. En el caso de la señal cosenoidal las señales exponenciales se suman; mientras que en la señal senoidal, se restan.
2. La amplitud de la señal cosenoidal es real; mientras que, en la señal senoidal es puramente imaginaria.

Ahora, vamos a revisar el siguiente concepto:

“Un conjunto de señales exponenciales complejas relacionadas armónicamente corresponde a exponenciales con frecuencias fundamentales múltiplos de  $\omega_0$ ”.

- **Conjunto**, significa que se trata de varias señales.
- **Señales exponenciales complejas**, corresponden a expresiones del tipo  $e^{j\omega_0 t}$ .
- **Relacionadas armónicamente** significa que sus frecuencias pueden expresarse como  $k\omega_0$ , donde  $k$  es un entero. En otras palabras, todas las frecuencias presentes en la señal son **múltiplos enteros de una misma frecuencia fundamental**.

**Ejemplo 21: manipulación de exponenciales complejas.**

Supongamos que tenemos la siguiente señal,

$$x(t) = e^{j2t} + e^{j3t}$$

Entonces, aplicamos los siguientes pasos:

1. Identificar las frecuencias angulares de cada término:

$$\omega_1 = 2, \quad \omega_2 = 3$$

2. Calculamos la frecuencia angular promedio:

$$\bar{\omega} = \frac{2 + 3}{2} = \frac{5}{2}$$

3. Factorizamos el término  $e^{j\bar{\omega}t}$ :

$$x(t) = e^{j2.5t} \{e^{-j0.5t} + e^{j0.5t}\}$$

4. Re-escribimos la expresión para identificar una señal cosenoidal

Nota aclaratoria: introducimos el factor  $2/2$  con el fin de completar la forma necesaria para aplicar directamente la identidad del coseno a partir de las exponenciales complejas.

$$x(t) = e^{j2.5t} \frac{2}{2} \{e^{-j0.5t} + e^{j0.5t}\}$$

Por lo tanto:

$$x(t) = 2e^{j2.5t} \cos(0.5t)$$

Para dibujar la magnitud de la señal, observamos que

$$|e^{j2.5t}| = 1,$$

Y, en consecuencia:

$$|x(t)| = 2|\cos(0.5t)|$$

Ahora, vamos a utilizar el siguiente código en Python para graficar

$|x(t)|$ .

Primero, graficamos la envolvente cosenoidal  $x(t)=\cos(0.5t)$ , asociada a la señal original.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Definir el rango de tiempo
t = np.linspace(0, 8 * np.pi, 1000)

# Calcular la señal x(t)
x = np.cos(0.5 * t)

# Graficar la señal
plt.figure(figsize=(8, 5))
plt.plot(t, x, label=r'$\cos(0.5t)$')
plt.xlabel('t')
plt.ylabel('Amplitud')
plt.title('x(t) = cos(0.5t)')
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()
```

Figura 64. Ejemplo 21: código en Python señal  $x(t) = \cos(0.5t)$ .

Obteniendo la siguiente figura:

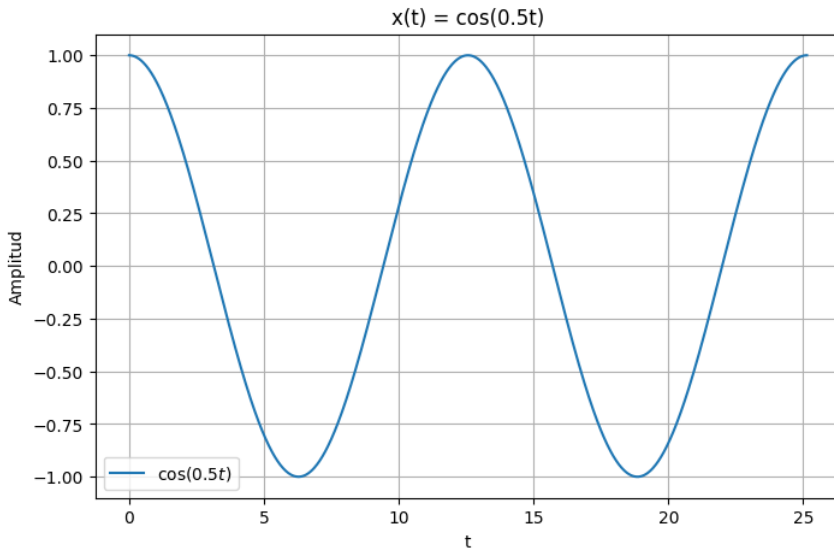


Figura 65. Ejemplo 21: gráfica de la señal  $x(t) = \cos(0.5t)$ .

Teniendo en cuenta que la frecuencia fundamental de esta señal es  $\omega_0 = 0.5 \text{ [rad/s]}$ , tenemos que el periodo, definido como  $T = 2\pi/(\omega_0)$  es igual a  $T = 2\pi/0.5 = 4\pi$ , y entonces, cada  $4\pi$  ( $\sim 12.56$ ) segundos, tenemos un ciclo de la señal. En el caso del código utilizado, al graficar de 0 a  $8\pi$ , tenemos dos ciclos de la señal.

Ahora, vamos a graficar  $|x(t)| = 2|\cos(0.5t)|$  con el siguiente código en Python:

```

# Calcular la magnitud de la señal
x = 2 * np.abs(np.cos(0.5 * t))

# Graficar la señal
plt.figure(figsize=(8, 5))
plt.plot(t, x, label=r'$\cos(0.5t)$')
plt.xlabel('t')
plt.ylabel('Amplitud')
plt.title('|x(t)| = 2|cos(0.5t)|')
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()

```

Figura 66. Ejemplo 21: código en Python señal  $|x(t)| = 2|\cos(0.5t)|$ .  
Y obtenemos:

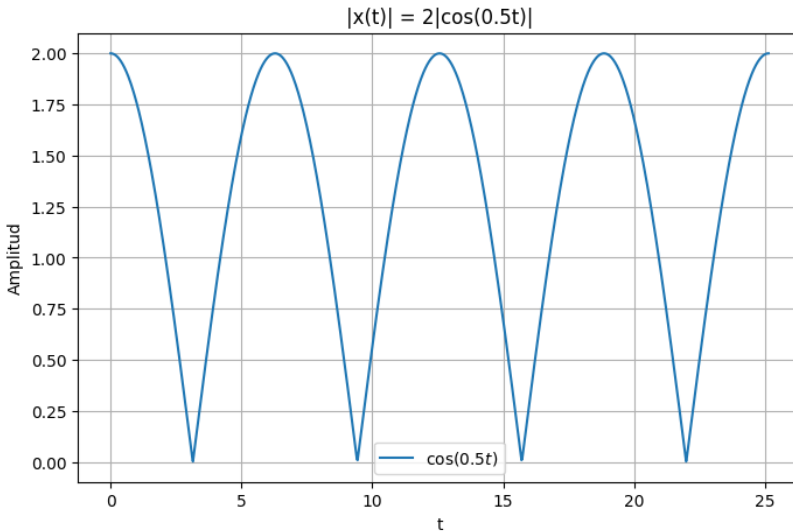


Figura 67. Ejemplo 21: gráfica de la señal  $|x(t)| = 2|\cos(0.5t)|$ .

Al comparar las dos figuras anteriores, nos damos cuenta que, el periodo de la segunda señal es la mitad del periodo de la primera señal, debido a que se obtuvo su valor absoluto, por lo que las amplitudes negativas ahora son positivas.

### 3.1.3. Forma general de la exponencial compleja

La forma general de una señal exponencial continua compleja es:

$$x(t) = Ae^{(r+j\omega_0)t}$$

donde,

$$A \in \mathbb{C}, \quad r \in \mathbb{R}, \quad \omega_0 \in \mathbb{R}$$

El término  $r$  determina si la señal crece o decrece en en tiempo:

- Si  $r > 0$ , la señal es creciente.
- Si  $r < 0$ , la señal es decreciente.

Sin embargo, en cualquiera de estos dos casos la señal no es periódica, debido a la presencia del factor exponencial real  $e^{rt}$ .

Por esta razón, cuando se utilizan exponenciales complejas para representar señales periódicas, se considera el caso particular en el que:

$$r = 0$$

Lo que conduce a la forma:

$$x(t) = Ae^{j\omega_0 t}$$

que corresponde a la exponencial compleja periódica estudiada en la sección anterior.

Nota aclaratoria:

Por esta razón, la exponencial compleja  $e^{j\omega t}$  constituye la **base natural para representar señales periódicas**, ya que es la única exponencial cuya magnitud permanece constante y cuya fase evoluciona de forma periódica en el tiempo.

### 3.1.4. Ejercicios propuestos

En los siguientes ejercicios se analiza la magnitud de señales formadas por la suma de exponenciales complejas. El propósito es observar cómo las

diferentes frecuencias angulares afectan la forma y el período de  $|x(t)|$  a partir de su representación gráfica.

Grafique  $|x(t)|$  de las siguientes señales:

1.  $x(t) = e^{j4\pi t} + e^{j8\pi t}$
2.  $x(t) = e^{j2\pi t} + e^{j8\pi t}$
3.  $x(t) = e^{j2\pi t} + e^{j4\pi t}$
4.  $x(t) = e^{j4\pi t} + e^{j16\pi t}$

### 3.2. SERIES DE FOURIER DE SEÑALES SENOIDALES

Antes de introducir formalmente la ecuación de la Serie de Fourier, analizaremos de manera intuitiva cómo una señal periódica puede representarse como la suma de senos y cosenos, o de forma equivalente, como la suma de exponenciales complejas. A partir de ejemplos sencillos, se identificará qué frecuencias están presentes en la señal y cómo cada una contribuye a su forma, utilizando la fórmula de Euler como herramienta de apoyo.

**Ejemplo 22: Series de Fourier de una señal senoidal: enfoque intuitivo con armónicas consecutivas.**

Sea  $x(t) = 1 + \text{sen}(4\pi t) + 2 \cos(4\pi t) + \cos\left(8\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$ . Encontrar los  $\alpha_k$  y dibujar  $|a_k|$ .

1. Determinar la frecuencia fundamental e identificar cuáles armónicas están presentes, y si existe o no el coeficiente  $\alpha_0$ :

$$\text{M.C.D. } (4\pi, 4\pi, 8\pi) = 4\pi$$

Donde M.C.D. representa el Máximo Común Divisor.

Entonces, la frecuencia fundamental es  $\omega_0 = 4\pi$  y se tendría la

primera ( $a_1, a_{-1}$ ) y segunda armónica ( $a_2, a_{-2}$ ). Adicionalmente, como existe un nivel de D.C. también se tiene  $a_0$ .

Nota aclaratoria:

La frecuencia fundamental corresponde al **máximo común divisor de las frecuencias presentes en la señal**, ya que todas las componentes deben poder expresarse como múltiplos enteros de dicha frecuencia.

2. Aplicar Euler:

Recordando que  $\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2} \{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\}$  y que

$\sen(\omega_0 t) = \frac{1}{2j} \{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}\}$ , entonces se tiene que:

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2j} \{e^{j4\pi t} - e^{-j4\pi t}\} + \{e^{j4\pi t} + e^{-j4\pi t}\} + \frac{1}{2} \{e^{j(8\pi t + \frac{\pi}{4})} + e^{-j(8\pi t + \frac{\pi}{4})}\}$$

Resolviendo, se llega a:

$$x(t) = 1 + \frac{e^{j4\pi t}}{2j} - \frac{e^{-j4\pi t}}{2j} + e^{j4\pi t} + e^{-j4\pi t} + \frac{e^{j8\pi t} * e^{j\frac{\pi}{4}}}{2} + \frac{e^{-j8\pi t} * e^{-j\frac{\pi}{4}}}{2}$$

Ahora, se agrupan por exponenciales, y se obtiene que:

$$x(t) = 1 + e^{j4\pi t} \left\{1 + \frac{1}{2j}\right\} + e^{-j4\pi t} \left\{1 - \frac{1}{2j}\right\} + e^{j8\pi t} \left\{\frac{e^{j\frac{\pi}{4}}}{2}\right\} + e^{-j8\pi t} \left\{\frac{e^{-j\frac{\pi}{4}}}{2}\right\}$$

3. Identificar los coeficientes de la SF:

Recordando que de forma general  $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$ , y que en nuestro caso solamente existe  $a_0, a_1, a_{-1}, a_2, a_{-2}$ , entonces la señal es de la forma (haciendo  $\omega_0 = 4\pi$ ):

$$x(t) = a_0 + a_1 e^{j4\pi t} + a_{-1} e^{-j4\pi t} + a_2 e^{j8\pi t} + a_{-2} e^{-j8\pi t}$$

Y al comparar término a término con lo obtenido en el paso 2, entonces:

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = 1 + \frac{1}{2j}$$

$$a_{-1} = 1 - \frac{1}{2j}$$

$$a_2 = \frac{e^{j\frac{\pi}{4}}}{2}$$

$$a_{-2} = \frac{e^{-j\frac{\pi}{4}}}{2}$$

4. Encontrar la magnitud de los coeficientes de la SF:

$$|a_0| = |1| = 1$$

$$|a_1| = |a_{-1}| = \left| 1 + \frac{1}{2j} \right| = \left| 1 - \frac{j}{2} \right| = \sqrt{1^2 + 0.5^2} = 1.118$$

$$|a_2| = |a_{-2}| = \left| \frac{e^{j\frac{\pi}{4}}}{2} \right| = \left| \frac{\cos(\frac{\pi}{4}) + j\text{sen}(\frac{\pi}{4})}{2} \right| = \left| \frac{0.707 + j0.707}{2} \right| = \frac{\sqrt{0.707^2 + 0.707^2}}{2} = 0.5$$

5. Dibujar la magnitud de los coeficientes de la SF:

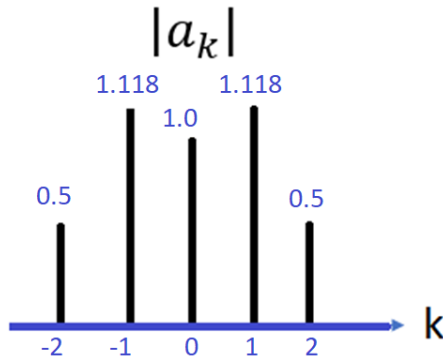


Figura 68. Magnitud de los coeficientes de la SF, ejemplo 22.

Cada valor de  $|a_k|$  representa la magnitud de una armónica (en este caso armónica 1, armónica 2 y nivel de d.c.) de la señal.

**Ejemplo 23: Series de Fourier de una señal senoidal: enfoque intuitivo con armónicas no consecutivas.**

Sea  $x(t) = 1 + 2\text{sen}(\pi t) - \cos(\pi t) + 3\cos\left(3\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$ . Encontrar los  $a_k$  y dibujar  $|a_k|$ .

- 1.
1. Determinar la frecuencia fundamental e identificar cuáles armónicas están presentes, y si existe o no el coeficiente  $a_0$ :

$$\text{M.C.D}(\pi, \pi, 3\pi) = \pi$$

Donde M.C.D. representa el Máximo Común Divisor.

Entonces, la frecuencia fundamental es  $\omega_0 = \pi$  y se tendría la primera ( $a_1, a_{-1}$ ) y tercera armónica ( $a_3, a_{-3}$ ). Adicionalmente, como existe un nivel de D.C. también se tiene  $a_0$ .

2. Aplicar Euler:

Recordando que  $\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}\{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\}$

y que  $\text{sen}(\omega_0 t) = \frac{1}{2i}\{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}\}$ , entonces se tiene que:

$$x(t) = 1 + \frac{1}{j}\{e^{j\pi t} - e^{-j\pi t}\} - \frac{1}{2}\{e^{j\pi t} + e^{-j\pi t}\} + \frac{3}{2}\{e^{j(3\pi t + \frac{\pi}{2})} + e^{-j(3\pi t + \frac{\pi}{2})}\}$$

Resolviendo, se llega a:

$$x(t) = 1 + \frac{e^{j\pi t}}{j} - \frac{e^{-j\pi t}}{j} - \frac{e^{j\pi t}}{2} - \frac{e^{-j\pi t}}{2} + \frac{3e^{j3\pi t} * e^{j\frac{\pi}{2}}}{2} + \frac{3e^{-j3\pi t} * e^{-j\frac{\pi}{2}}}{2}$$

Ahora, se agrupan por exponenciales, y se obtiene que:

$$x(t) = 1 + e^{j\pi t} \left\{ -\frac{1}{2} + \frac{1}{j} \right\} + e^{-j\pi t} \left\{ -\frac{1}{2} - \frac{1}{j} \right\} + e^{j3\pi t} \left\{ \frac{3e^{j\frac{\pi}{2}}}{2} \right\} + e^{-j3\pi t} \left\{ \frac{3e^{-j\frac{\pi}{2}}}{2} \right\}$$

3. Identificar los coeficientes de la SF:

Recordando que de forma general  $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$ , y que en nuestro caso solamente existe  $a_0, a_1, a_{-1}, a_3, a_{-3}$ , entonces la señal es de la forma (haciendo  $\omega_0 = \pi$ ):

$$x(t) = a_0 + a_1 e^{j\pi t} + a_{-1} e^{-j\pi t} + a_3 e^{j3\pi t} + a_{-3} e^{-j3\pi t}$$

Y al comparar término a término con lo obtenido en el paso 2, entonces:

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{j}$$

$$a_{-1} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{j}$$

$$a_3 = \frac{3e^{j\frac{\pi}{2}}}{2}$$

$$a_{-3} = \frac{3e^{-j\frac{\pi}{2}}}{2}$$

4. Encontrar la magnitud de los coeficientes de la SF:

$$|a_0| = |1| = 1$$

$$|a_1| = |a_{-1}| = \left| -\frac{1}{2} + \frac{1}{j} \right| = \left| -\frac{1}{2} - j \right| = \sqrt{0.5^2 + 1^2} = 1.118$$

$$|a_3| = |a_{-3}| = \left| \frac{3e^{j\frac{\pi}{2}}}{2} \right| = \left| 3 \frac{\cos(\frac{\pi}{2}) + j\sin(\frac{\pi}{2})}{2} \right| = \left| 3 \frac{0+j}{2} \right| = 3 \frac{\sqrt{0^2+1^2}}{2} = 1.5$$

5. Dibujar la magnitud de los coeficientes de la SF:

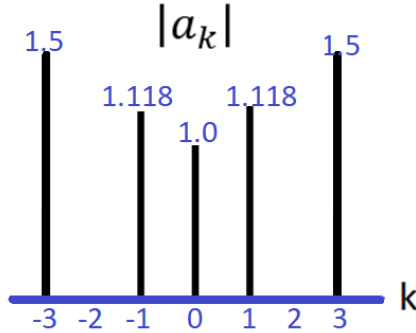


Figura 69. Magnitud de los coeficientes de la SF, Ejemplo 23.

Cada valor de  $|a_k|$  representa la magnitud de una armónica (en este caso armónica 1, armónica 3 y nivel de d.c.) de la señal.

Nota aclaratoria:  
 Tener en cuenta que en este ejercicio no existe la segunda armónica, dado que ninguna de las señales seno o coseno tienen frecuencia  $2\omega_0$ .

### 3.3. SERIES DE FOURIER DE SEÑALES PERIÓDICAS

A continuación, se presentan dos ecuaciones que nos permitirán, por una parte, representar una señal periódica en términos de los coeficientes de la SF (SF); y, por otra parte, encontrar los coeficientes de la SF de una señal periódica en tiempo continuo.

Partimos de la **ecuación de síntesis**, la cual se presenta a continuación:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\left(\frac{2\pi}{T}\right)t}$$

donde cada término  $a_k$  representa una componente armónica de la señal, ubicada en múltiplos de la frecuencia fundamental  $\omega_0$ .

Con esta ecuación, representamos una señal periódica a partir de la suma de exponenciales complejas relacionadas armónicamente. Es importante tener en cuenta que todas las exponenciales tienen como frecuencia un múltiplo entero (denominado  $k$ ) de la frecuencia fundamental de la señal. Cuando la señal es real, las armónicas aparecen en pares conjugados; es decir, si existe  $k$ , también existe  $-k$ . Esta propiedad garantiza que la señal resultante en el dominio del tiempo sea real.

Por otra parte, tenemos la **ecuación de análisis** que nos permite encontrar los coeficientes de la SF de una señal periódica en tiempo continuo, así

$$a_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jk\left(\frac{2\pi}{T}\right)t} dt$$

Los coeficientes de Fourier equivalen a la porción de la señal representada por cada frecuencia. El coeficiente  $a_0$  corresponde al nivel de d.c. de la señal.

#### Ejemplo 24. Serie de Fourier de una señal cuadrada periódica

A continuación, vamos a aplicar la ecuación de análisis para encontrar los SF de una señal periódica que no es de tipo senoidal. Específicamente, para la señal “cuadrada periódica”, la cual la definimos así:

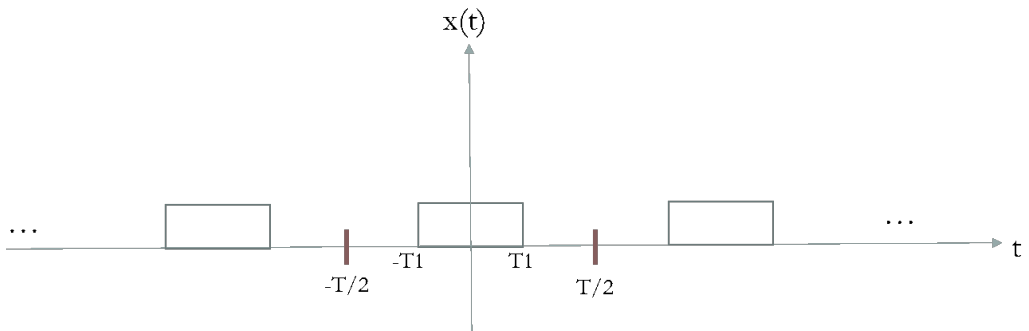


Figura 70. Señal cuadrada periódica.

Asumimos que la amplitud de la señal es 1, es decir que,

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T_1 \\ 0 & T_1 < |t| < \frac{T}{2} \end{cases}$$

Esta definición corresponde a un periodo fundamental de la señal.

Para el coeficiente  $a_0$ , hacemos  $k = 0$  en la ecuación de análisis, y tenemos que:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T_1}^{T_1} dt = \frac{2 * T_1}{T}$$

Para los demás valores de  $k$ , tenemos que:

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T_1}^{T_1} e^{-jk\omega_0 t} dt = -\frac{1}{jk\omega_0 T} e^{-jk\omega_0 t} \Big|_{-T_1}^{T_1}$$

$$a_k = \frac{2}{k\omega_0 T} \left[ \frac{e^{jk\omega_0 T_1} - e^{-jk\omega_0 T_1}}{2j} \right] = \frac{2 * \text{sen}(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T} = \frac{\text{sen}(k\omega_0 T_1)}{k * \pi}$$

Esta expresión muestra que la envolvente de los coeficientes tiene forma tipo sinc (a medida que  $k$  se hace más grande, el coeficiente se hace más pequeño).

Vamos a continuación a graficar los coeficientes de la SF de una señal cuadrada, con los siguientes valores:

1. Amplitud de la señal = 1
2.  $T_1 = 0.01$ ,  $T = 10 * T_1$
3. El rango de la gráfica va desde  $k = -15$  hasta  $k = 15$ .

Utilizaremos el siguiente código en Python:

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
num=20
coef = np.arange(-num,num+1)
a = np.zeros((len(coef),1))

T1=0.01
T = 10*T1
w0=2*np.pi/T
a0=2*T1/T
print("el valor de D.C. de la señal, es:", a0)

count=0
for k in range(-num,num+1):
    if k==0:
        a[count]=a0
    else:
        a[count]=np.sin(k*w0*T1)/(k*np.pi)
        count=count+1

plt.rcParams["figure.figsize"] = (8,4)
plt.stem(coef, a)

```

Figura 71. Ejemplo 24: código en Python para calcular la SF de una señal cuadrada periódica.

Del código anterior, vemos que:

- La variable “coef” corresponde a valores enteros en el rango [-20 20], creada a partir de la instrucción *np.arange*, con incremento (por defecto) de 1. Esta variable corresponde a “k” de la ecuación de análisis.
- La variable “a” corresponde a los coeficientes de la SF. Se crea con *np.zeros*, de la misma longitud que “coef”. Posteriormente, con el ciclo for, a medida que se obtienen los coeficientes, se reemplaza el cero por el valor correspondiente.
- La frecuencia fundamental  $\omega_0$  la obtenemos a partir del periodo de la señal, T, con la ecuación  $\omega_0 = 2\pi/T$ .

- El nivel de d.c. de la señal, es decir, el coeficiente  $a_0$  se calcula con la ecuación  $a_0 = 2T_1/T$ ; mientras que, para los demás valores de  $k$ , se utiliza la ecuación sinc que obtuvimos previamente.

Con este código obtenemos la siguiente gráfica:

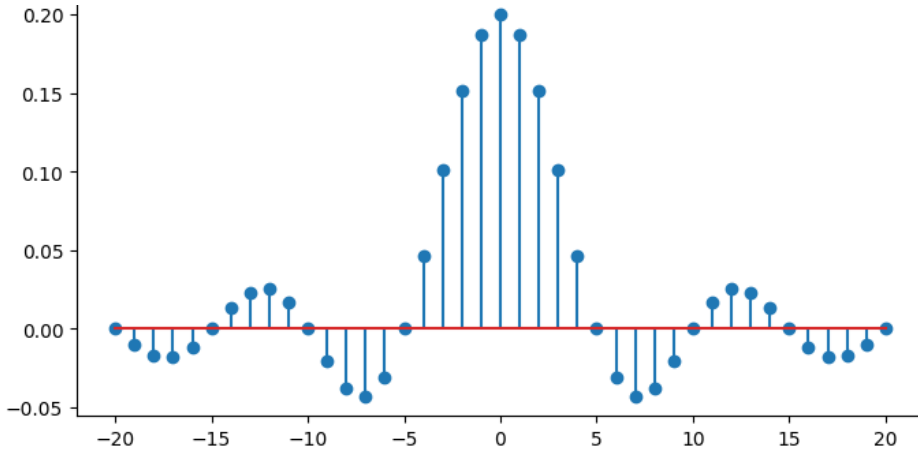


Figura 72. Ejemplo 24: gráfica de los coeficientes de la SF de una señal

cuadrada periódica para  $T_1 = 0.01$ ,  $T = 10 * T_1$ ,  $k = [-20 \ 20]$ .

Para este ejercicio el nivel de d.c. de la señal es 0.2, dado que  $2T_1/T = 2T_1/(10T_1) = 0.2$ . Adicionalmente, apreciamos que la “envolvente” de los coeficientes de la SF es de tipo sinc; a medida que se aleja de  $k=0$ , los coeficientes de la SF disminuyen en amplitud.

Vamos ahora a graficar los coeficientes de la SF, pero de la señal cuadrada periódica con  $T_1 = 0.01$  y  $T = 20 * T_1$ .

Y obtenemos:

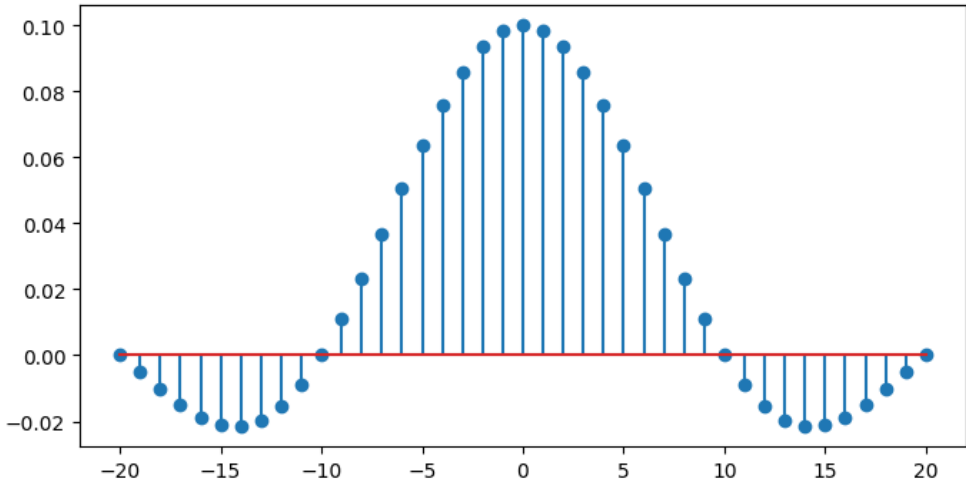


Figura 73. Ejemplo 24: gráfica de los coeficientes de la SF de una señal cuadrada periódica para  $T_1 = 0.01$ ,  $T = 20 * T_1$ ,  $k = [-20 \ 20]$ .

En este caso, el nivel de d.c. de la señal es  $2T_1/T = 2T_1/(20T_1) = 0.1$ . Adicionalmente, podemos observar que, la cantidad de “cruces por cero” ha disminuido. El primer cruce por cero lo obtenemos en el coeficiente  $k = 10$  (y su contraparte) y el segundo cruce por cero en  $k = 20$  (y su contraparte).

Nota aclaratoria:

De forma general, los cruces por cero de los coeficientes de la SF se presentan cuando se cumple la condición  $k\omega_0 T_1 = n\pi$ , lo que implica que dichos cruces dependen directamente de la relación entre el período de la señal  $T$  y el ancho del pulso  $T_1$ . En este caso, como  $T = MT_1$  con  $M = 20$ , los cruces por cero aparecen cada  $M/2$  coeficientes.

Pero, ¿qué ocurre si  $M$  es un valor impar? Vamos a ver su comportamiento con un ejemplo.

$$T = 9 * T_1$$

Obtenemos la siguiente gráfica de coeficientes de la SF:

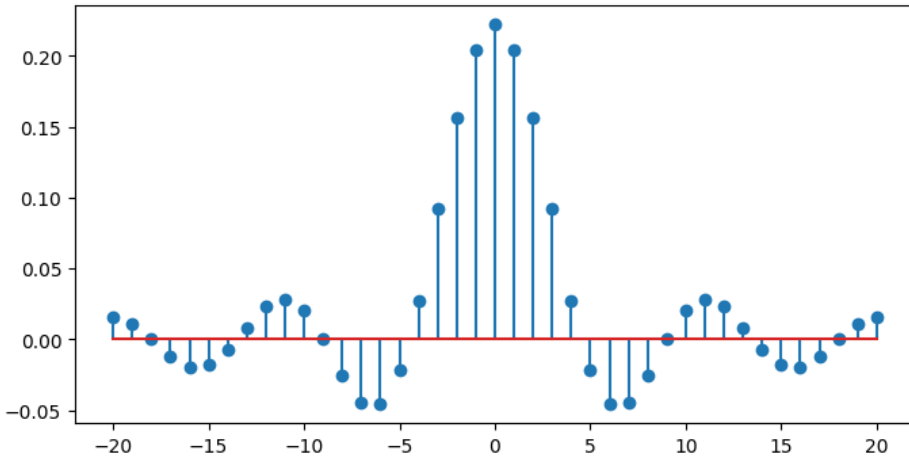


Figura 74. Coeficientes de la SF de la señal cuadrada periódica,

$$T_1 = 0.01, T = 9 * T_1, k = [-20 \ 20].$$

El primer cruce por cero debería ocurrir en  $k = 4.5$ . Sin embargo, recordemos que el índice armónico  $k$  solo puede tomar valores enteros. Por lo tanto, el cruce por cero no aparece exactamente en un coeficiente, sino que se observa como un cambio de signo entre coeficientes consecutivos, específicamente entre el coeficiente  $a_4$  (positivo) y el coeficiente  $a_5$  (negativo).

El segundo cruce por cero debería ocurrir en  $k = 9$ . Como este valor sí es entero, se obtiene directamente que  $a_9=0$ .

Entonces, siguiendo la misma explicación anterior, ¿qué esperamos que ocurra si  $M = 5$ ? El primer cambio de polaridad se presenta entre el coeficiente  $a_2$  (coeficiente positivo) y  $a_3$  (coeficiente negativo). Y el primer cruce

por cero lo tendremos en  $a_5$ .

Hacemos en el código:

```
T = 5*T1
```

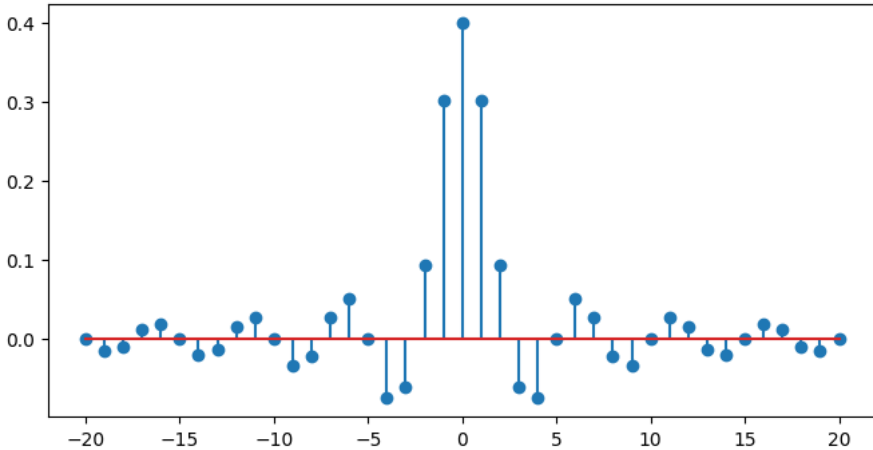


Figura 75. Coeficientes de la SF de la señal cuadrada periódica,  $T_1 = 0.01$ ,

$$T = 5 * T_1, k = [-20 \ 20].$$

El resultado obtenido coincide con lo esperado. El nivel de d.c es de  $2T_1/T = 2T_1/(5T_1) = 0.4$ .

### Ejemplo 25. Serie de Fourier de un tren de impulsos

Una de las señales más importantes en el análisis de señales y en sistemas de comunicaciones es el tren de impulsos. Aunque a primera vista puede parecer una construcción abstracta, esta señal permite modelar procesos fundamentales como el muestreo de señales continuas.

El tren de impulsos se define como:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

Donde  $T$  corresponde al periodo de la señal, es decir, al espaciamiento entre impulsos consecutivos. Todos los impulsos están separados entre sí por el mismo valor, que corresponde a  $T$ .

Los coeficientes de la SF de esta señal son:

$$a_k = \frac{1}{T} \quad -\infty < k < \infty$$

Es decir, el número de coeficientes de la SF es infinito, definido para todos los valores de  $k$ .

Vamos a utilizar el siguiente código en Python para dibujar una porción del tren de impulsos

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Parámetros
T = 10
n = np.arange(-5, 6) # 11 impulsos: desde -5T hasta 5T
t_imp = n * T        # posiciones de los impulsos

# Gráfica
plt.figure()
plt.stem(t_imp, np.ones_like(t_imp))

plt.title('Tren de impulsos (T = 10)')
plt.xlabel('t')
plt.ylabel('Amplitud')
plt.grid()

plt.show()
```

Figura 76. Código en Python Ejemplo 25. Señal tren de impulsos, para  $T=10$ .

Obteniendo la siguiente señal

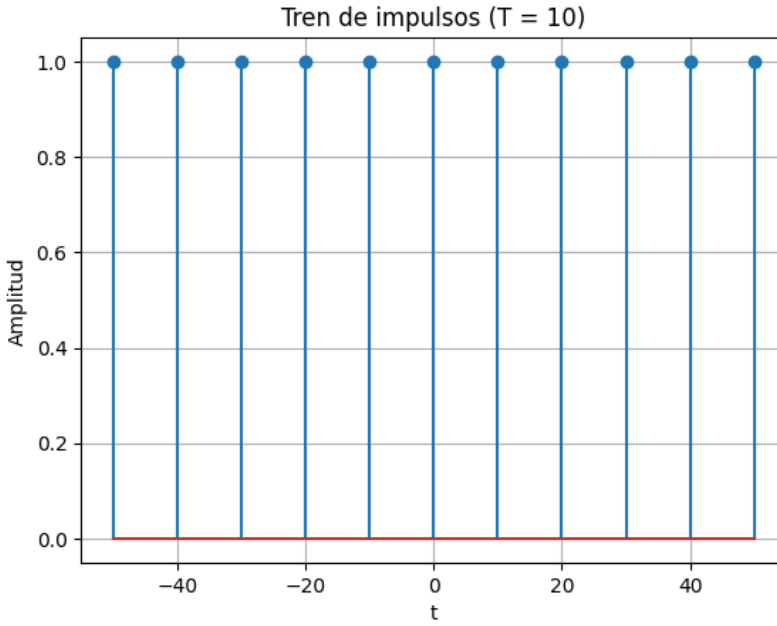


Figura 77. Señal tren de impulsos desde  $-5T$  hasta  $5T$ , para  $T=10$  [s].

Posteriormente, escribimos el código en Python para graficar una porción de los coeficientes de la SF, desde  $k=-5$  hasta  $k=5$ , así:

```
# Valores de k
k = np.arange(-5, 6)

# Coeficientes ak
ak = (1/T) * np.ones_like(k)

# Gráfica
plt.figure()
plt.stem(k, ak)

plt.title('Coeficientes de la SF del tren de impulsos, con T=10')
plt.xlabel('k')
plt.ylabel('|a_k|')
plt.grid()

plt.show()
```

Figura 78. Código en Python Ejemplo 25. Coeficientes de la SF de la señal tren de impulsos, para  $T=10$ .

Y obtenemos la siguiente gráfica:

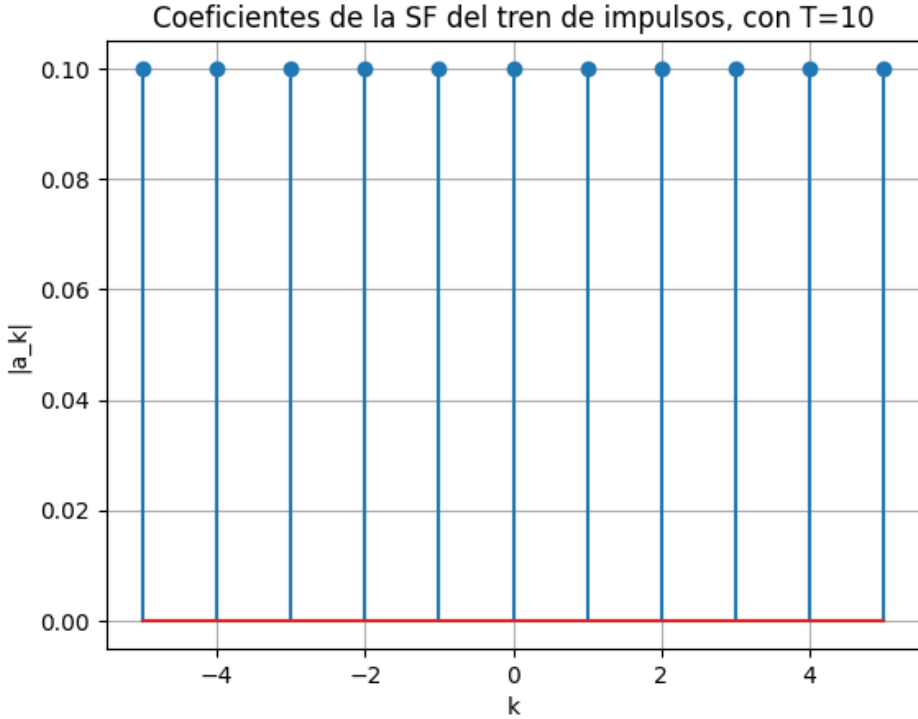


Figura 79. Coeficientes de la SF de la señal tren de impulsos, para T=10 [s].

Cada valor de  $a_k$  representa la amplitud de una armónica (en este caso infinitas) de la señal.

### 3.4. FENÓMENO DE GIBBS

El fenómeno de Gibbs aparece en señales que presentan discontinuidades, como la señal cuadrada periódica, y se manifiesta cuando la señal se reconstruye utilizando un número finito de coeficientes de la SF. En este caso, aparecen oscilaciones o “rizos” alrededor de las regiones donde se presentan las discontinuidades. La amplitud de estas oscilaciones es aproximadamente del **9 % del salto en la discontinuidad**, independientemente del número de términos utilizados en la reconstrucción.

Por ejemplo, para una señal cuadrada de amplitud 1, los rizados alcanzan valores cercanos a 0.09. Este fenómeno ocurre independientemente del número de términos de la Serie de Fourier utilizados en la reconstrucción de la señal  $x(t)$ .

### Ejemplo 26. Fenómeno de Gibbs señal cuadrada

Para ilustrar este fenómeno, vamos a reconstruir una señal cuadrada periódica con un número finito de parejas de coeficientes (5, 10, 50) incluido el nivel de d.c de la señal, utilizando el siguiente código en Python:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Parámetros de la señal
T = 1          # Periodo
T1 = T / 4     # Ancho del pulso
w0 = 2 * np.pi / T  # Frecuencia fundamental

# Eje de tiempo
t = np.linspace(-T, T, 2000)

# Señal cuadrada ideal
x = np.where(np.abs(t) < T1, 1, 0)

# Función para reconstrucción con N armónicas
def fourier_reconstruction(t, N):
    x_rec = np.zeros_like(t, dtype=float)

    # Coeficiente DC
    a0 = 2 * T1 / T
    x_rec += a0

    # Armónicas
    for k in range(1, N + 1):
        ak = np.sin(k * w0 * T1) / (k * np.pi)
        x_rec += 2 * ak * np.cos(k * w0 * t)

    return x_rec

# Número de armónicas a usar
N_values = [5, 10, 50]

# Gráfica
plt.figure(figsize=(9, 5))
plt.plot(t, x, 'k', linewidth=2, label='Señal cuadrada ideal')

for N in N_values:
    plt.plot(t, fourier_reconstruction(t, N),
             label=f'Reconstrucción con N = {N}')

plt.xlabel('t')
plt.ylabel('Amplitud')
plt.title('Fenómeno de Gibbs en la reconstrucción de una señal cuadrada')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

Figura 80. Código en Python del Ejemplo 25,  $T_1 = T/4$ .

Obteniendo las siguientes señales reconstruidas:

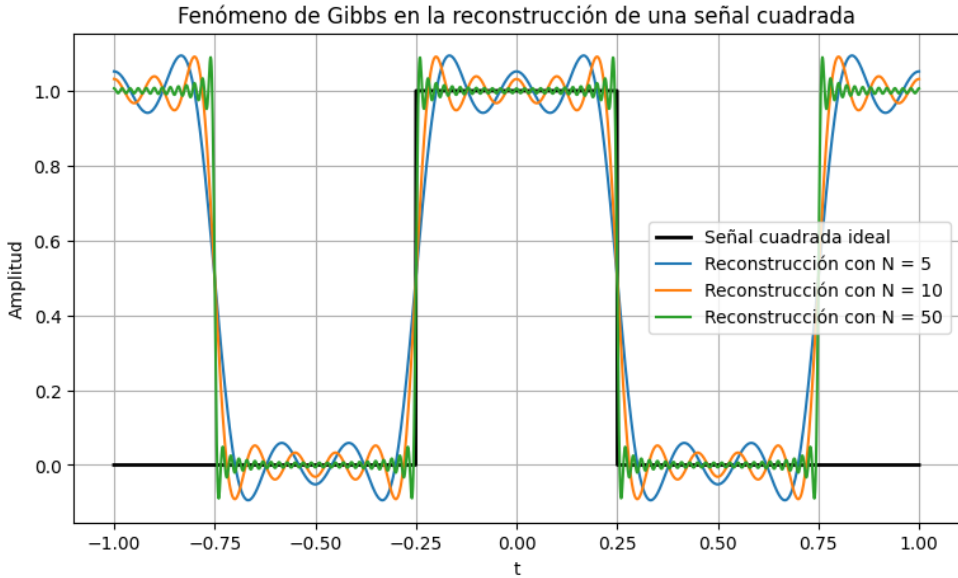


Figura 81. Fenómeno de Gibbs en la reconstrucción de una señal cuadrada periódica: (azul)  $-5 \leq k \leq 5$ , (naranja)  $-10 \leq k \leq 10$ , verde ( $-50 \leq k \leq 50$ ), (negra) ideal.

En la figura anterior se observa el fenómeno de Gibbs al reconstruir una señal cuadrada periódica utilizando un número finito de coeficientes de la SF.

A medida que aumenta el número de armónicas, la reconstrucción mejora significativamente en las regiones continuas. No obstante, en las proximidades de las discontinuidades persisten oscilaciones cuya amplitud no tiende a cero, sino que converge a un valor constante cercano al **9 % del salto de la señal**. Aunque el ancho de la región donde aparecen los rizados se reduce al aumentar el número de armónicas, su amplitud máxima no desaparece.

Este fenómeno ocurre **incluso si se aumenta indefinidamente el número de armónicas utilizadas en la reconstrucción**, lo cual constituye una de las características más distintivas del fenómeno de Gibbs.

Nota de énfasis:

Este fenómeno no desaparece al aumentar el número de armónicas, sino que se hace más localizado alrededor de la discontinuidad

### 3.5. CONDICIONES SUFICIENTES PARA LA EXISTENCIA DE LA SERIE DE FOURIER

Aunque una amplia variedad de señales periódicas admite representación en Serie de Fourier, no todas admiten esta representación en el sentido clásico.

De manera general, una condición suficiente para que una señal periódica tenga representación en Serie de Fourier es que sea cuadráticamente integrable en un periodo, es decir:

$$\int_0^T |x(t)|^2 dt < \infty$$

A partir de esta condición general, se derivan un conjunto de condiciones más específicas, conocidas como las **Condiciones de Dirichlet**, las cuales garantizan la existencia de la Serie de Fourier en el sentido clásico.

- Condición 1:  $x(t)$  debe ser absolutamente integrable sobre cualquier periodo.

Es decir:

$$\int_0^T |x(t)| dt < \infty$$

Si se cumple con esta condición, se tendrá que  $|a_k| < \infty$ .

Como ejemplo, una señal que NO cumple con esta condición es

$x(t) = \frac{1}{t}$ , periódica con periodo  $T$ . Dado que en  $t = 0, T, 2T, \dots, \infty$  tendrá discontinuidades, generando que el área bajo la curva no sea finita.

- Condición 2: en cualquier rango finito de tiempo, la cantidad de máximos y mínimos de  $x(t)$  debe ser finita.

Como ejemplo, una señal que NO cumple con esta condición es una

señal del tipo  $x(t) = \text{sen}\left(\frac{1}{t}\right)$ , definida en un intervalo finito, ya que presenta un número infinito de oscilaciones en un intervalo acotado de tiempo.

- Condición 3: en cualquier rango finito de tiempo, la cantidad de discontinuidades debe ser finita.

Como ejemplo, una señal que NO cumple con esta condición es una señal que divide su amplitud a la mitad, en la mitad del tiempo restante,

y esto lo repite desde  $t = 0$  hasta  $t = T$ , periódica con periodo igual a  $T$ .

Nota aclaratoria:

La condición cuadrática garantiza convergencia en el sentido de energía, mientras que las condiciones de Dirichlet permiten asegurar convergencia puntual en los puntos de continuidad de la señal.

### 3.6. PROPIEDADES DE LA SF

A continuación, se presentan las propiedades de la SF.

#### 3.6.1. Linealidad:

Sea  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ , señales periódicas con coeficientes de la SF:

$$x_1(t) \xrightarrow{SF} a_k$$

$$x_2(t) \xrightarrow{SF} b_k$$

Si estas señales se suman, y a su vez cada una está multiplicada en amplitud por un escalar A y B, de la forma:

$$x_3(t) = Ax_1(t) + Bx_2(t)$$

Entonces, los coeficientes de la SF de la nueva señal se calculan de acuerdo con:

$$x_3(t) \xrightarrow{SF} Aa_k + Bb_k$$

Nota: para poder identificar correctamente los armónicos de la señal  $x_3(t)$  es necesario determinar la frecuencia fundamental de la señal, a través de la operación de MCD (máximo común divisor) entre las frecuencias de cada uno de sus términos.

### 3.6.2. Desplazamiento en el dominio del tiempo

Sea  $x_1(t)$  una señal periódica con coeficientes de la SF:

$$x_1(t) \xrightarrow{SF} a_k$$

Si esta señal se desplaza en el tiempo,

$$x_2(t) = x_1(t - t_0)$$

Entonces, los coeficientes de la SF de la nueva señal se obtienen como:

$$x_2(t) \xrightarrow{SF} a_k e^{-jk\omega_0 t_0}$$

Es decir, la magnitud de los coeficientes originales no se afecta, solamente su fase.

### 3.6.3. Inversión en el dominio del tiempo

Sea  $x_1(t)$  una señal periódica con coeficientes de la SF:

$$x_1(t) \xrightarrow{SF} a_k$$

Si esta señal se invierte en el tiempo:

$$x_2(t) = x_1(-t)$$

Entonces, los coeficientes de la SF de la nueva señal se obtienen como:

$$x_2(t) \xrightarrow{SF} a_{-k}$$

Es decir, al invertir una señal, también se invierten sus coeficientes de la SF.

De esta propiedad se tiene que:

- Si  $x(t)$  es par, entonces sus coeficientes son también par.
- Si  $x(t)$  es impar, entonces sus coeficientes son también impar.

### 3.6.4. Multiplicación en el dominio del tiempo

Sea  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  señales periódicas con coeficientes de la SF:

$$x_1(t) \xrightarrow{SF} a_k$$

$$x_2(t) \xrightarrow{SF} b_k$$

Si estas señales se multiplican, así:

$$x_3(t) = x_1(t) \cdot x_2(t)$$

Entonces, los coeficientes de la SF de la nueva señal se obtienen como:

$$x_3(t) \xrightarrow{SF} a_k \otimes b_k$$

Donde  $\otimes$  es el operador de convolución. Es decir, se realiza la convolución continua entre los espectros de ambas señales.

### Relación de Parseval

Nos sirve para calcular la potencia promedio de la señal, tanto en el dominio del tiempo, como a partir de sus coeficientes de la SF, por medio de la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2$$

En muchas ocasiones es más sencillo aplicar la parte derecho de la ecuación que realizar la integral del cuadrado de la señal (ej. si  $x(t)$  es una señal cosenoidal), por lo que la relación de Parseval es de gran utilidad.

### 3.7. EJEMPLOS DE SF DE SEÑALES PERIÓDICAS

A continuación, se presentan algunos ejemplos de aplicación de la Serie de Fourier y sus propiedades.

#### Ejemplo 27. Reconstruir la señal $x(t)$ a partir de los coeficientes de la SF

Escriba la señal  $x(t)$  en términos de señales senoidales o cosenoidales,

sabiendo que  $\omega_0 = 200\pi \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$ , y los coeficientes de la SF son:

$$a_0 = 5 \qquad a_1 = 2 \qquad a_{-1} = 2 \qquad a_3 = j \qquad a_{-3} = -j$$

**Solución:**

Nuestra señal  $x(t)$  tendrá un nivel de d.c de 5, la primera armónica correspondiente a una señal cosenoidal (dado que  $a_1$  y  $a_{-1}$  son enteros), y la tercera armónica correspondiente a una señal senoidal (dado que  $a_3$  y  $a_{-3}$  son estrictamente imaginarios).

Aplicando la ecuación de síntesis, tenemos que:

$$x(t) = 5 + 2\{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\} + j\{e^{j3\omega_0 t} - e^{-j3\omega_0 t}\}$$

O de forma equivalente,

$$x(t) = 5 + 2\{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\} - 1/j \{e^{j3\omega_0 t} - e^{-j3\omega_0 t}\}$$

Ahora, teniendo en cuenta la fórmula de Euler, podemos re-escribir la señal  $x(t)$  como:

$$x(t) = 5 + 4\cos(\omega_0 t) - 2\text{sen}(3\omega_0 t)$$

Y reemplazando el valor de  $\omega_0$ ,

$$x(t) = 5 + 4\cos(200\pi t) - 2\text{sen}(600\pi t)$$

**Ejemplo 28. Reconstruir la señal  $x(t)$  a partir de los coeficientes de la SF (sólo nos proporcionan los valores de  $k$  positivos)**

Se tiene una señal  $x(t)$  real y periódica con que  $\omega_0 = 100\pi \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$ . Esta señal contiene un nivel de d.c., la primera y la cuarta armónica, cuyos coeficientes de la SF, son:

$$a_0 = 2$$

$$a_1 = 5$$

$$a_4 = 2j$$

Encuentre  $x(t)$  expresada de la forma  $x(t) = A + B\cos(\omega_0 t) + C\text{sen}(4\omega_0 t)$

**Solución:**

Aunque no nos proporcionaron el valor de  $a_{-1}$ , ni el de  $a_{-4}$ , a partir de la fórmula de Euler sabemos que si un coeficiente es estrictamente entero,

su pareja será también entero de la misma magnitud y signo; mientras que, si un coeficiente es estrictamente imaginario, su pareja también será imaginario (misma magnitud), pero de signo contrario. Es decir, para este ejercicio tenemos que  $a_{-1} = 5$ , y  $a_{-4} = -2j$ .

Entonces, aplicando la ecuación de síntesis, tenemos que:

$$x(t) = 2 + 5\{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\} + 2j\{e^{j4\omega_0 t} - e^{-j4\omega_0 t}\}$$

O de forma equivalente,

$$x(t) = 2 + 5\{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\} - 2/j \{e^{j4\omega_0 t} - e^{-j4\omega_0 t}\}$$

Ahora, teniendo en cuenta la fórmula de Euler, podemos re-escribir la señal  $x(t)$  como:

$$x(t) = 2 + 10\cos(\omega_0 t) - 4\text{sen}(4\omega_0 t)$$

Reemplazando el valor de la frecuencia fundamental  $\omega_0 = 100\pi \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$ , obtenemos finalmente

$$x(t) = 2 + 10\cos(100\pi t) - 4\text{sen}(400\pi t)$$

**Ejemplo 29. Cálculo de los coeficientes de la SF de una señal periódica formada por componentes senoidales armónicamente relacionados.**

Dibuje la señal en el dominio del tiempo, calcule y grafique la magnitud de los coeficientes de la SF de la señal,

$$x(t) = 2\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \text{sen}(2\pi t)$$

A diferencia de los dos primeros ejercicios, en este caso tenemos la señal en el dominio del tiempo, y debemos encontrar sus coeficientes de la SF.

Lo primero que debemos hacer es encontrar el M.C.D. (máximo común divisor) de las frecuencias de los tres términos de  $x(t)$ , es decir:

$$\text{M.C.D} (\pi/2, \pi/2, 2\pi) = \pi/2$$

Es decir, tenemos que  $\omega_0 = \pi/2$ , entonces tenemos dos términos de aportan a la primera armónica, y un término que aporta a la cuarta armónica (dado que  $2\pi/0.5\pi=4$ ).

Al aplicar Euler, tenemos que:

$$a_1 = 0.5 - j$$

$$a_{-1} = 0.5 + j$$

$$a_4 = -j/2$$

$$a_{-4} = j/2$$

Como siguiente paso, vamos a calcular la magnitud de los coeficientes obtenidos, y nos queda así

$$|a_1| = |a_{-1}| = \sqrt{0.5^2 + 1} = \sqrt{1.25} = 1.118$$

$$|a_4| = |a_{-4}| = \sqrt{0.5^2} = \sqrt{0.25} = 0.5$$

Para el código en Python, primero vamos a re-escribir la señal  $x(t)$  en términos de la frecuencia fundamental ( $f_0$ ), así:

$$x(t) = A * \sin(k_1 * 2\pi * f_0 * t) + B * \cos(k_2 * 2\pi * f_0 * t) + C * \sin(k_3 * 2\pi * f_0 * t)$$

Donde A, B y C son amplitudes de las señales senoidales o cosenoidales; mientras que  $k_1, k_2, k_3$  corresponden al valor de la armónica de esa señal senoidal o cosenoidal.

Quedando para este ejemplo, así:

$$x(t) = 2 * \sin(1 * 2\pi * f_0 * t) + 1 * \cos(1 * 2\pi * f_0 * t) + 1 * \sin(4 * 2\pi * f_0 * t)$$

Ahora, vamos a utilizar el siguiente código en Python:

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Parámetros de la señal
fo = 1/4 # frecuencia fundamental de la señal [Hz]
fs = 40 * fo # frecuencia de muestreo (cumple Nyquist)
ciclos = 1 # cantidad de ciclos a visualizar
stop = ciclos / fo # tiempo final
ns = int(stop * fs) # número de muestras

# Vector de tiempo (alineado exactamente con la fs)
t = np.arange(0, stop, 1/fs)

# Definición de la señal
x = 2*np.sin(2*np.pi*fo*t) + np.cos(2*np.pi*fo*t) + np.sin(4*2*np.pi*fo*t)

# Configuración de la figura
plt.rcParams["figure.figsize"] = (8,4)

# Gráfica
plt.plot(t, x, label='Señal continua')
plt.plot(t, x, 'ko', label='Muestras')

plt.xlabel('Tiempo (s)')
plt.ylabel('$x(t)$')
plt.title(r'Señal $x(t)=2\sin(2\pi f_0 t)+\cos(2\pi f_0 t)+\sin(8\pi f_0 t)$')

plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()

```

Figura 82. Código en Python Ejemplo 28, señal

$$x(t) = 2\sin(2\pi f_0 t) + \cos(2\pi f_0 t) + \sin(8\pi f_0 t).$$

Del código anterior, lo primero que se definió fue la frecuencia fundamental de la señal, expresada en Hertz, que corresponde a  $f_0 = 0.25 \text{ Hz}$ , dado que la frecuencia angular fundamental es  $\omega_0 = \frac{\pi}{2} [\text{rad/s}]$ .

Como segundo parámetro, definimos la frecuencia de muestreo de la señal. De acuerdo con el criterio de Nyquist, esta debe ser al menos el doble de la frecuencia máxima presente en la señal. En este ejercicio, la máxima armónica es la cuarta, por lo que  $f_{m\acute{a}x} = 4f_0 = 4(0.25) = 1 \text{ [Hz]}$ . Como hemos definido  $f_s = 40f_0 = 40(0.25) = 10 \text{ [Hz]}$ , se cumple ampliamente con el criterio de Nyquist.

Como tercer parámetro se define la cantidad de ciclos de la señal a visualizar, que en este caso se ha fijado en un solo ciclo.

El tiempo final de visualización (stop) se calcula a partir del número de ciclos y de la frecuencia fundamental de la señal. Posteriormente, el número de muestras se obtiene multiplicando el tiempo total de visualización por la frecuencia de muestreo.

A continuación, se construyen dos vectores: el primero corresponde al vector de tiempo de la señal y el segundo a los valores de amplitud de  $x(t)$ . El vector de tiempo se genera utilizando la instrucción `np.arange`, la cual crea muestras separadas exactamente por el periodo de muestreo  $1/f_s$ . Finalmente, la señal se calcula utilizando las funciones `np.sin` y `np.cos`, y se grafica con la función `plt.plot`.

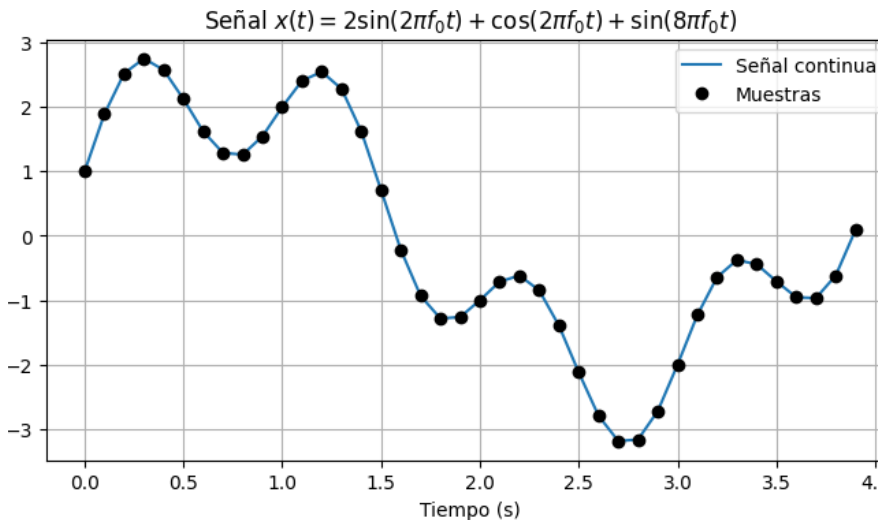


Figura 83. Gráfica del Ejemplo 28, señal  $x(t) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \sin(2\pi t)$

A continuación, vamos a utilizar el siguiente código, para graficar la magnitud de los coeficientes de la SF:

```

from scipy.fft import fft, fftfreq
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# número de muestras
n = len(x)

# Serie de Fourier
ak = fft(x) / n
k = fftfreq(n, 1/fs)

# posiciones armónicas
k = k / fo

# Configurar la visualización
plt.stem(k, np.abs(ak))
plt.xlim(-6, 6)
plt.ylim(0, 2)

plt.xlabel('k')
plt.ylabel(r'$|a_k|$')
plt.title('Magnitud de los coeficientes de la Serie de Fourier')

plt.grid(True)
plt.show()

```

Figura 84. Código en Python Ejemplo 28, coeficientes de la SF.

Lo primero que hacemos es calcular la longitud de la señal (es decir, la cantidad de muestras de la señal  $x(t)$  en el dominio del tiempo) y asignarla al parámetro  $n$ . Posteriormente, calculamos la transformada rápida de Fourier de la señal con la función  $fft$ , y normalizamos el resultado dividiendo entre  $n$ .

Como siguiente paso, utilizamos la función `fftfreq` para encontrar las frecuencias asociadas a cada coeficiente obtenido. Dado que la Serie de Fourier se expresa en términos del índice armónico  $k$ , dividimos estas frecuencias entre la frecuencia fundamental  $f_0$ , obteniendo así las posiciones correspondientes de  $k$ .

Finalmente, utilizamos la función `plt.stem` para graficar la magnitud de los coeficientes  $|a_k|$ .

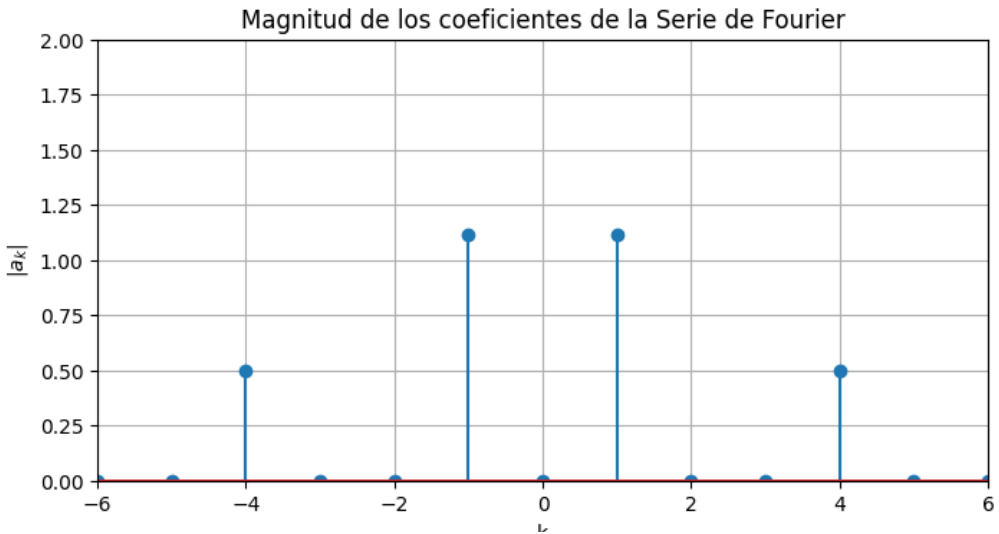


Figura 85. Código en Python Ejemplo 28, coeficientes de la SF de la señal

$$x(t) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \sin(2\pi t).$$

Al comparar las amplitudes obtenidas en la figura anterior, con los valores obtenidos en los cálculos teóricos, nos damos cuenta que corresponden al mismo resultado.

### Ejemplo 30. Cálculo de los coeficientes de la SF de una señal periódica expresada como producto de cosenos

Calcule y dibuje los coeficientes de la SF de la señal  
 $x(t) = 2\cos(\omega_0 t)\cos(2\omega_0 t)$ .

#### Solución:

En este ejercicio aplicaremos la propiedad de multiplicación de la Serie de Fourier, la cual establece que cuando dos señales periódicas se multiplican en el dominio del tiempo, los coeficientes de la SF de la señal resultante corresponden a la convolución de los coeficientes de la SF de cada señal.

Para aplicar esta propiedad, primero separamos la señal en dos factores:

$$x(t) = x_1(t) \cdot x_2(t)$$

Donde

$$x_1(t) = 2\cos(\omega_0 t) \xrightarrow{SF} a_k$$

$$x_2(t) = \cos(2\omega_0 t) \xrightarrow{SF} b_k$$

$$x(t) \xrightarrow{SF} c_k = a_k \otimes b_k$$

$$a_1 = 1 \quad \text{y} \quad a_{-1} = 1$$

Y con la señal  $x_2(t)$ , tenemos, que:

$$b_2 = 1/2 \quad \text{y} \quad b_{-2} = 1/2$$

Debemos tener en cuenta que en la señal  $x_2(t)$  aparece la segunda armónica, dado que la frecuencia del coseno es  $2\omega_0$ . De forma similar, en la señal  $x_1(t)$  aparece la primera armónica, porque la frecuencia es  $\omega_0$ .

A continuación, se presenta la implementación en Python para ilustrar la convolución de coeficientes de la SF.

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

COL_A, COL_B, COL_C = "#D32F2F", "#5E35B1", "#1565C0"

def impulses(ax, k, a, col, title=""):
    ax.axhline(0, color="black", lw=2)
    ax.set_xlim(-4,4); ax.set_ylim(-0.25,1.25)
    ax.set_xticks([]); ax.set_yticks([])
    for s in ax.spines.values(): s.set_visible(False)

    for ki, ai in zip(k,a):
        ax.vlines(ki,0,ai,color=col,lw=5)
        txt = r"$\frac{1}{2}$" if np.isclose(ai,0.5) else f"{ai:g}"
        ax.text(ki,ai+0.06,txt,ha="center",color=col)
        ax.text(ki,-0.12,f"{int(ki)}",ha="center",color=col)

    ax.text(3.9,0.02,"$k$",ha="right")
    ax.set_title(title)

# coeficientes
ka, aa = np.array([-1,1]), np.array([1,1])
kb, bb = np.array([-2,2]), np.array([0.5,0.5])

# convolución
k1, c1 = kb-1, bb
k2, c2 = kb+1, bb

# resultado final
k = np.array([-3,-1,1,3])
c = np.array([0.5,0.5,0.5,0.5])

# figura
fig = plt.figure(figsize=(10,7))
gs = fig.add_gridspec(3,2, height_ratios=[1,1,1.2])

ax1 = fig.add_subplot(gs[0,0])
ax2 = fig.add_subplot(gs[0,1])
ax3 = fig.add_subplot(gs[1,0])
ax4 = fig.add_subplot(gs[1,1])
ax5 = fig.add_subplot(gs[2,:]) # ocupa todo el ancho

impulses(ax1,ka,aa,COL_A,"$a_k$")
impulses(ax2,kb,bb,COL_B,"$b_k$")
impulses(ax3,k1,c1,COL_C,"Conv. con $a_{-1}$")
impulses(ax4,k2,c2,COL_C,"Conv. con $a_{1}$")
impulses(ax5,k,c,COL_C,"Resultado $c_k = a_k \circledast b_k$")

plt.tight_layout()
plt.show()

```

Figura 86. Código en Python Ejemplo 29, aplicación de la propiedad de multiplicación.

Al realizar la convolución de los coeficientes  $a_k$  con los coeficientes  $b_k$ , obtenemos:

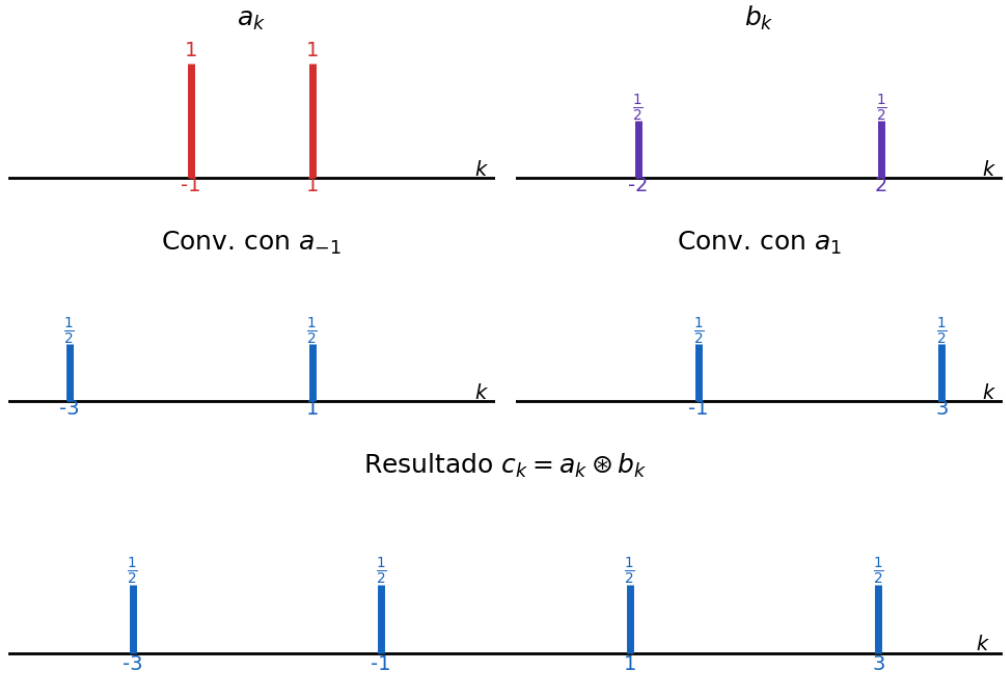


Figura 87. Gráfica del Ejemplo 29, aplicación de la propiedad de multiplicación.

Con

$$c_1 = 0.5$$

$$c_3 = 0.5$$

$$c_{-1} = 0.5$$

$$c_{-3} = 0.5$$

Observamos que, como resultado de la convolución de los coeficientes  $a_k$  y  $b_k$ , aparecen componentes espectrales en  $k = \pm 1$  y  $k = \pm 3$ . Esto ilustra cómo la multiplicación de señales en el dominio del tiempo genera nuevas componentes armónicas en el dominio de la frecuencia.

**Ejemplo 31. Aplicación de la Relación de Parseval**

Determine la potencia promedio de la señal  $x(t)$  real y periódica, a partir de sus coeficientes de la SF

$$a_0 = 2 \quad a_1 = 1 - 2j \quad a_{-1} = 1 + 2j$$

$$a_2 = 0.5 - j \quad a_{-2} = 0.5 + j$$

**Solución:**

Recordando la relación de Parseval, tenemos que la potencia promedio de una señal (es decir,  $\bar{P}$ ), se calcula a partir de:

$$\bar{P} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2$$

Primero, calculamos la magnitud de los coeficientes de la SF, así:

$$|a_0| = |2|$$

$$|a_1| = |a_{-1}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$|a_2| = |a_{-2}| = \sqrt{0.5^2 + 1^2} = \sqrt{1.25}$$

Reemplazando los valores, se tiene:

$$\bar{P} = |a_0|^2 + |a_1|^2 + |a_{-1}|^2 + |a_2|^2 + |a_{-2}|^2$$

$$\bar{P} = |a_0|^2 + 2|a_1|^2 + 2|a_2|^2$$

$$\bar{P} = 4 + 2(5) + 2(1.25) = 16.5$$

**3.8. RESUMEN DEL CAPITULO DE SERIES DE FOURIER**

En este capítulo estudiamos la Serie de Fourier, una herramienta fundamental del análisis de señales que permite representar señales periódicas como la suma de componentes sinusoidales relacionadas armónicamente.

Inicialmente, introdujimos la señal exponencial compleja, la cual constituye la base matemática para la representación de señales periódicas en

términos de exponenciales complejas. Esta representación facilita el análisis en el dominio de la frecuencia y permite expresar cualquier señal periódica como una combinación de armónicas de la frecuencia fundamental.

Posteriormente, presentamos la expresión general de la Serie de Fourier, que permite descomponer una señal periódica  $x(t)$  en una suma infinita de exponenciales complejas:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

donde  $\omega_0$  corresponde a la frecuencia fundamental de la señal y  $a_k$  representa a los coeficientes de la serie, los cuales determinan tanto la amplitud como la fase de cada componente armónica.

A lo largo del capítulo analizamos diversos ejemplos que nos permitieron comprender cómo calcular los coeficientes de la Serie de Fourier y cómo interpretar su representación en el dominio de la frecuencia. Observamos que esta descomposición produce un espectro discreto, compuesto por líneas espectrales cuya amplitud y fase están determinadas por los coeficientes  $a_k$ .

También estudiamos algunas propiedades de la Serie de Fourier que facilitan el cálculo de los coeficientes cuando la señal presenta ciertas simetrías o cuando se realizan transformaciones en el dominio del tiempo. Finalmente, analizamos el fenómeno de Gibbs, el cual aparece al aproximar señales con discontinuidades mediante un número finito de armónicas.

En conjunto, estos resultados nos permiten comprender cómo se distribuye la energía de una señal periódica en el dominio de la frecuencia, a través de un espectro discreto compuesto por armónicas. Sin embargo, muchas señales presentes en aplicaciones reales no son periódicas. En estos casos, al considerar que el periodo tiende a infinito, esta representación discreta en frecuencia se transforma en una representación continua, dando origen a la Transformada de Fourier, herramienta que permite analizar señales no periódicas en el dominio de la frecuencia.