CAPÍTULO IV

Transformada de Fourier de Señales períodicas y aperiódicas

La Transformada de Fourier extiende el análisis al caso de señales no periódicas, permitiendo representarlas en términos de un continuo de frecuencias. En este capítulo, partiremos de señales matemáticas y avanzaremos hasta una señal real, en particular una señal de voz, con el objetivo de comprender cómo la Transformada de Fourier revela su contenido espectral y permite identificar componentes como interferencias o ruido, tanto desde el punto de vista teórico como a través de su implementación en Python.

Al finalizar el capítulo, deberás estar en capacidad de:

- Explicar la relación entre la Serie de Fourier y la Transformada de Fourier, y su aplicación en señales periódicas y aperiódicas.
- Interpretar la Transformada de Fourier como una representación en frecuencia continua e identificar los principales componentes espectrales de una señal.
- Comprender y aplicar las principales propiedades de la Transformada de Fourier y su efecto en la relación tiempo–frecuencia.
- Aplicar la Transformada de Fourier mediante la FFT en Python para analizar señales.
- Interpretar el espectro de señales reales, en particular señales de voz, identificando interferencias y reconociendo su utilidad como base del Procesamiento Digital de Señales.

4.1. MOTIVACIÓN DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

En el capítulo anterior estudiamos la Serie de Fourier, una herramienta que permite representar una señal periódica como la suma de exponenciales complejas relacionadas armónicamente. Esta representación nos permitió analizar cómo se distribuye la energía de la señal en el dominio de la frecuencia, obteniendo un espectro discreto compuesto por líneas espectrales ubicadas en múltiplos enteros de la frecuencia fundamental.

Sin embargo, muchas señales presentes en aplicaciones reales no son periódicas. Por ejemplo, una señal de voz, una vibración mecánica o una señal biomédica suelen tener duración finita o variar de manera irregular en el tiempo. En estos casos, no es posible aplicar directamente la Serie de Fourier, ya que esta requiere que la señal sea periódica, es decir, que se repita indefinidamente en el tiempo.

Nota aclaratoria:

Matemáticamente, una señal periódica satisface la condición

$$x(t) = x(t - T)$$

donde T corresponde al periodo de la señal. Como consecuencia, una señal periódica tiene **soporte infinito**, ya que su forma se repite para todos los valores de t.

A partir de esta limitación surge una pregunta natural: ¿cómo podemos analizar en el dominio de la frecuencia señales que no son periódicas?

Una forma de abordar este problema consiste en construir una versión periódica de una señal no periódica. Para ello, imaginemos que tomamos una señal de duración finita y la repetimos periódicamente en el tiempo, obteniendo así una señal de periodo T, la cual puede representarse mediante la Serie de Fourier. Si aumentamos progresivamente el valor de T, las repeticiones de la señal se separan cada vez más en el eje temporal. En el límite, cuando $T \to \infty$, las repeticiones desaparecen y la señal resultante se comporta como una señal no periódica.

La Transformada de Fourier puede interpretarse como el límite de la Serie de Fourier cuando el periodo tiende a infinito.

Este proceso también tiene un efecto importante en el dominio de la frecuencia. En la Serie de Fourier, una señal periódica se representa mediante un conjunto discreto de frecuencias. A medida que el periodo de la señal aumenta, estas frecuencias se vuelven cada vez más cercanas entre sí. En el límite, cuando el periodo tiende a infinito, las líneas espectrales se vuelven infinitamente densas y el espectro deja de ser discreto para convertirse en un espectro continuo.

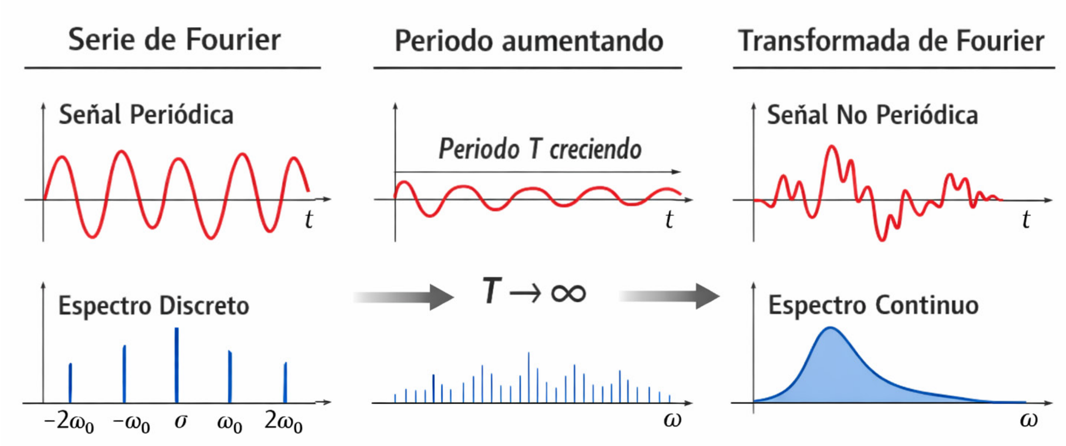

Figura 88. Transición conceptual entre la Serie de Fourier y la Transformada de Fourier. Inicialmente, la señal periódica (suma de senoidales) presenta un espectro discreto (parte izquierda de la figura). A medida que el periodo aumenta, las componentes espectrales discretas se acercan entre sí (como se ilustra en la parte central de la figura). Finalmente, en el límite $T \to \infty$, el espectro discreto se transforma en un espectro continuo (parte derecha de la figura).

Este razonamiento conduce naturalmente a la Transformada de Fourier, una herramienta que permite representar señales no periódicas mediante una distribución continua de frecuencias.

En este capítulo utilizaremos tanto la notación $X(j\omega)$ como $X(jf)$, donde $\omega = 2\pi f$. La primera se expresa en [rad/s] y la segunda en [Hz].

El espectro describe cómo se distribuye la amplitud (y fase) de la señal en función de la frecuencia.

4.2. TRANSFORMADA DE FOURIER DE SEÑALES PERIÓDICAS

Antes de iniciar el estudio de la Transformada de Fourier (TF) de señales aperiódicas, es importante analizar cómo se obtiene el espectro de una señal periódica a partir de los coeficientes de la Serie de Fourier (SF). Lo más importante para resaltar en este momento es que **el espectro de una señal periódica es siempre discreto**, y se calcula mediante alguna de las siguientes ecuaciones:

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

$$X(jf) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(f - kf_0)$$

En el primer caso, el espectro se expresa en $[rad/s]$; mientras que en el segundo en unidades de $[Hz]$.

Nota aclaratoria:

En este libro se utilizará la notación $X(jf)$ para enfatizar que el espectro de una señal puede ser complejo. En muchos textos también se utiliza la notación $X(f)$; ambas representan la Transformada de Fourier de la señal.

No obstante, en ambos casos los armónicos de la señal, los armónicos de la señal, que en la SF se denominan a_k, se convierten en **impulsos en frecuencia** que conservan la amplitud de la armónica y que están ubicados en $k\omega_0$, o kf_0, según corresponda.

Como diferencia importante, no solo cambia la ubicación de los impulsos en el eje de frecuencia, sino también su amplitud. Al comparar ambas representaciones espectrales, se observa que a partir de $X(j\omega)$ es posible obtener $X(jf)$ realizando dos operaciones: la frecuencia se divide entre 2π, y la amplitud de los impulsos también se divide entre 2π.

Ejemplo 32. TF de suma de señales cosenoidales

Supongamos que tenemos la señal $x(t) = 10cos(100\pi t) + 8cos(300\pi t) + 12cos(500\pi t)$, y deseamos graficar su Transformada de Fourier, tanto $X(j\omega)$, como $X(jf)$.

Lo primero que vamos a realizar es calcular los coeficientes a_k.

Identificamos la ω_0 calculando el M.C.D. entre las frecuencias angulares $\{100\pi, 300\pi, 500\pi\} = 100\pi$. Entonces, nuestra señal tiene la primera armónica, la tercera armónica y la quinta armónica, dado que la señal se puede re-escribir como:

$$x(t) = 10cos(\omega_0 t) + 8cos(3\omega_0 t) + 12cos(5\omega_0 t)$$

Entonces, los valores de a_k distintos de cero, son:

$a_1 = a_{-1} = 5$

$a_3 = a_{-3} = 4$

$a_5 = a_{-5} = 6$

Correspondientes a tres armónicas y seis coeficientes. Recordemos que, al tratarse de señales cosenoidales (y no senoidales), los coeficientes son **reales y pares**.

Ahora, aplicaremos la ecuación que relaciona $X(jf)$ con los seis valores de a_k, quedando:

$$X(jf) = a_1\delta(f - f_0) + a_{-1}\delta(f + f_0) + a_3\delta(f - 3f_0) + a_{-3}\delta(f + 3f_0) + a_5\delta(f - 5f_0) + a_{-5}\delta(f + 5f_0)$$

Y reemplazando $f_0 = 100\pi/(2\pi) = 50\ [Hz]$, con los valores de a_k, obtenemos:

$$X(jf) = 5\delta(f-50) + 5\delta(f+50) + 4\delta(f-150) + 4\delta(f+150) + 6\delta(f-250) + 6\delta(f+250)$$

Finalmente, obtenemos $X(j\omega)$, multiplicando la amplitud por 2π, al igual que las frecuencias, quedando:

$$X(j\omega) = 10\pi\delta(\omega-100\pi) + 10\pi\delta(\omega+100\pi) + 8\pi\delta(\omega-300\pi) + 8\pi\delta(\omega+300\pi) + 12\pi\delta(\omega-500\pi) + 12\pi\delta(\omega+500\pi)$$

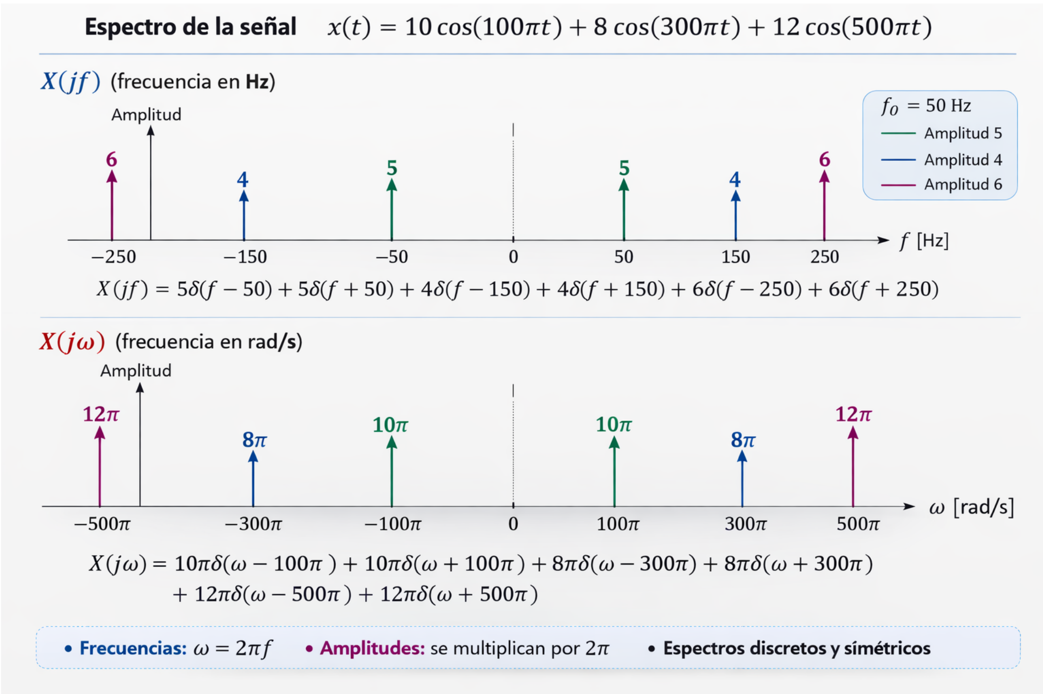

Figura 89. Ejemplo 31: Espectro $X(jf)$ y $X(j\omega)$ de la señal

$$x(t) = 10cos(\omega_0 t) + 8cos(3\omega_0 t) + 12cos(5\omega_0 t).$$

Ejemplo 33. TF de señal cuadrada periódica

Considere la siguiente señal periódica

$$x(t) = \begin{cases} 1 & -T_1 \le t \le T_1 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

con periodo

$$T = 20T_1$$

Esta señal corresponde a una señal cuadrada periódica.

Vamos entonces a calcular los coeficientes de la SF, recordando la ecuación que identificamos en el Capítulo 3, así:

$$a_0 = \frac{2T_1}{T}$$

$$a_k = \frac{sen(k\omega_0 T_1)}{k\pi}, \quad k \neq 0$$

Reemplazando los valores, tenemos

$$a_0 = \frac{2T_1}{20T_1} = \frac{2}{20} = 0.1$$

Y teniendo en cuenta que $\omega_0 = 2\pi/T = 2\pi/(20T_1) = \pi/(10T_1)$.

Entonces $\omega_0 T_1 = (\pi T_1)/(10T_1) = \pi/10$

$$a_k = \frac{sen\left(\frac{k\pi}{10}\right)}{k\pi}, \quad k \neq 0$$

Como los coeficientes de la Serie de Fourier son diferentes de cero para infinitos valores de k, el espectro de la señal está compuesto por infinitos impulsos ubicados en las frecuencias armónicas $f = kf_0$, así:

$$X(jf) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{sen\left(\frac{k\pi}{10}\right)}{k\pi} \delta(f - kf_0), \quad k \neq 0$$

Mientras que,

$$X(jf) = 0.1\delta(f)$$

Y en el caso de,

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2 * sen\left(\frac{k\pi}{10}\right)}{k} \delta(\omega - k\omega_0), \quad k \neq 0$$

$$X(j\omega) = 0.2\pi\delta(\omega)$$

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Parámetros del ejemplo
T1 = 0.01
T = 20*T1
f0 = 1/T

# 1. Señal rectangular periódica
t = np.linspace(-2*T,2*T,2000)
x = np.zeros_like(t)

for n in range(-3,4):
    x[(t>=-T1+n*T) & (t<=T1+n*T)] = 1

plt.figure(); plt.plot(t,x)
plt.title("Señal rectangular periódica")
plt.xlabel("t (s)"); plt.ylabel("x(t)")
plt.grid(); plt.show()

# 2. Coeficientes de Fourier
k = np.arange(-20,21)
ak = np.zeros(len(k))

for i,ki in enumerate(k):
    if ki==0:
        ak[i] = 2*T1/T
    else:
        ak[i] = np.sin(ki*np.pi/10)/(ki*np.pi)

plt.figure(); plt.stem(k,ak)
plt.title("Coeficientes de la SF")
plt.xlabel("k"); plt.ylabel("a_k")
plt.grid(); plt.show()

# 3. Espectro X(jf)
f = k*f0

plt.figure(); plt.stem(f,ak)
plt.title("X(jf)"); plt.xlabel("Frecuencia (Hz)")
plt.ylabel("Amplitud")
plt.grid(); plt.show()
```

Figura 90. Ejemplo 32: Código enb Python del Ejemplo 32.

Obteniendo las siguientes gráficas:

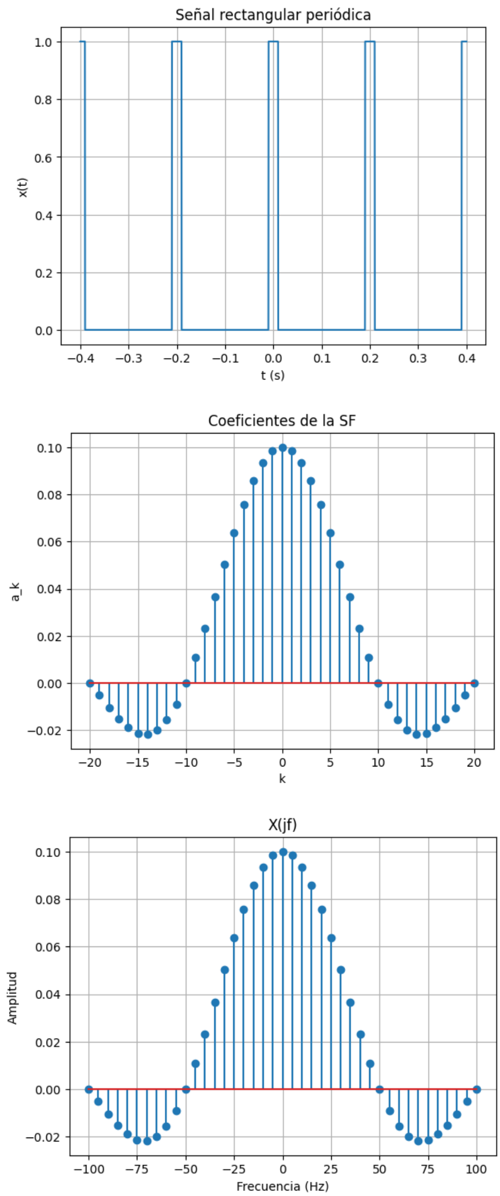

Figura 91. Ejemplo 32: a) Señal cuadrada periódica con $T = 20T_1$, b) a_k, c) $X(jf)$.

La señal cuadrada generada tiene $T_1 = 0.01\ [s]$, por lo que el tiempo total durante el cual la señal permanece en alto es $2T_1 = 0.02\ [s]$. Por otra parte, el periodo de la señal es de $T = 0.2\ [s]$.

En la gráfica de los coeficientes de la Serie de Fourier se han representado los valores de $-20 \leq k \leq 20$, lo que corresponde a un total de 41 términos (es decir, $2k_{máx} + 1$ con $k_{máx} = 20$), incluyendo el término de nivel de d.c. de la señal.

Una vez obtenidos los coeficientes de la Serie de Fourier, el espectro de la señal periódica puede construirse ubicando cada coeficiente a_k en la frecuencia armónica correspondiente $f = k f_0$.

Teniendo en cuenta que $f_0 = 1/T$, la frecuencia fundamental de la señal es $5\ [Hz]$. Por consiguiente, el coeficiente de la SF correspondiente a $k = 20$ se ubica en el espectro en la frecuencia $20 f_0 = 100\ [Hz]$.

4.3. CONDICIONES SUFICIENTES PARA LA EXISTENCIA DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

Antes de aplicar la Transformada de Fourier a una señal aperiódica, es necesario analizar si dicha transformada existe. Aunque un amplio número de señales aperiódicas admiten Transformada de Fourier, existen algunas para las cuales no es posible calcular su espectro, ya que no poseen energía finita.

Por esta razón, se han establecido ciertas condiciones matemáticas que permiten determinar si una señal aperiódica admite representación en el dominio de la frecuencia. Estas condiciones se conocen como **condiciones de Dirichlet**. En particular, una de las condiciones fundamentales es que la señal tenga energía finita, es decir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$$

Específicamente, las condiciones de Dirichtlet son tres:

- Condición 1: Se cumpla que la señal sea absolutamente integrable, es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$$

- Condición 2: la señal tenga un número finito de máximos y mínimos en cualquier intervalo finito.
- Condición 3: la señal tenga un número finito de discontinuidades en cualquier intervalo finito. Cada discontinuidad debe ser finita.

Nota aclaratoria:

Para el caso de señales periódicas, se aplicarán las condiciones de Dirichtlet de la SF.

4.4. TRANSFORMADA DE FOURIER DE SEÑALES APERIÓDICAS

En la sección anterior vimos que la Transformada de Fourier de una señal periódica consiste en un conjunto de impulsos en frecuencia ubicados en múltiplos enteros de la frecuencia fundamental (es decir $(k\omega_0), o\ (kf_0)$ para $X(j\omega)$ o $X(jf)$, respectivamente).

Sin embargo, muchas señales de interés en aplicaciones de ingeniería en telecomunicaciones no son periódicas. Por lo cual, es necesario extender el concepto de Transformada de Fourier hacia señales aperiódicas.

Como se mencionó en la sección 4.1. esto puede interpretarse como el caso límite en el cual el periodo de una señal periódica crece indefinidamente, es decir, $T \to \infty$. En esta situación, los impulsos del espectro dejan de estar separados por intervalos discretos y pasan a formar una **distribución continua en frecuencia**.

La Transformada de Fourier de señales aperiódicas se define como:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

o también,

$$X(jf) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t}\, dt$$

A diferencia de la SF, donde aparecen únicamente frecuencias discretas (armónicas), en este caso la frecuencia puede tomar **cualquier valor continuo**.

Ahora bien, la señal $x(t)$ puede reconstruirse a partir de $X(j\omega)$ o $X(jf)$ así, utilizando la Transformada Inversa de Fourier (ITF):

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t}\, d\omega$$

Y,

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(jf) e^{j2\pi f t}\, df$$

La relación entre la Serie de Fourier y la Transformada de Fourier puede entenderse observando cómo cambia la representación espectral de una señal dependiendo de su periodicidad. La siguiente figura resume estas representaciones para señales periódicas y aperiódicas.

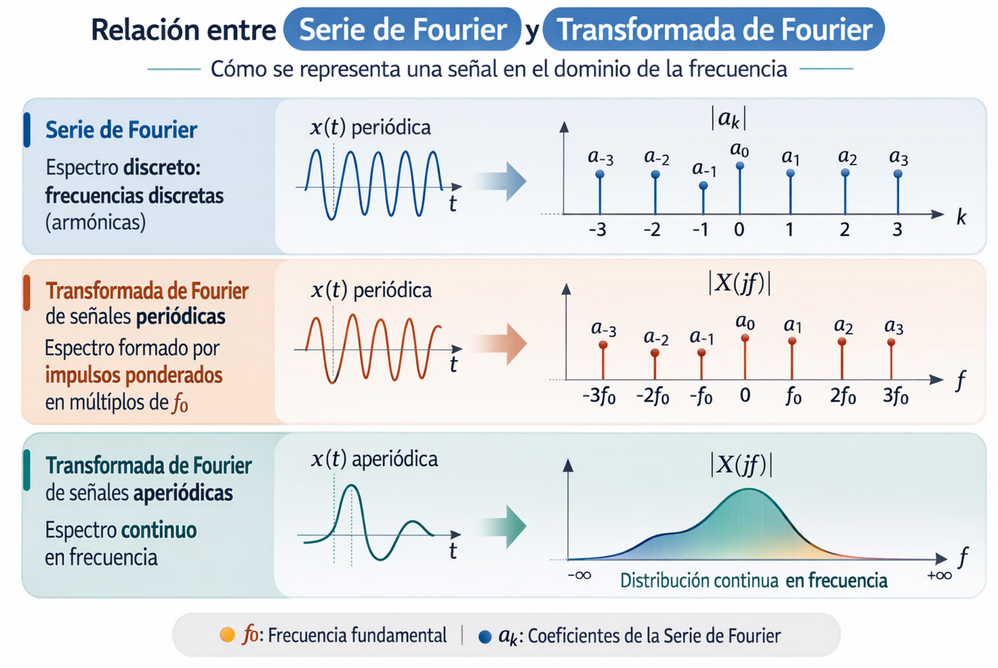

Figura 92. Relación entre la Serie de Fourier y la Transformada de Fourier. Para señales periódicas se obtiene un espectro discreto, mientras que para señales aperiódicas la Transformada de Fourier produce un espectro continuo.

A continuación, realizaremos la TF de algunas señales aperiódicas.

Ejemplo 34. TF de señal exponencial real unilateral

Sea la siguiente señal:

$$x(t) = e^{-at}u(t), \qquad a > 0$$

Recordando que la señal escalón unitario existe para los valores de tiempo positivos (incluido el cero), x(t) puede escribirse como:

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Entonces, en la ecuación de la TF de la señal, solamente se tendrá la integral a partir de cero, es decir:

$$X(j\omega) = \int_0^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t}\, dt$$

Dado que para ese rango de tiempo la señal x(t) toma el valor e^{-at}.

Resolviendo la integral, obtenemos que:

$$X(j\omega) = \left[\frac{e^{-(a+j\omega)t}}{-(a+j\omega)}\right]_0^{\infty}$$

Ahora, evaluamos los límites:

$$\lim_{t\to\infty} e^{-(a+j\omega)t} = 0 \quad \text{(dado que a>0)}$$

Y

$e^{-(a+j\omega)0} = 1$

Por lo tanto:

$$X(j\omega) = \frac{0-1}{-(a+j\omega)} = \frac{1}{(a+j\omega)}$$

Teniendo en cuenta que el espectro contiene una componente imaginaria, es necesario calcular su magnitud para graficarla, obteniendo:

$$|X(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}}$$

Para realizar la gráfica de $|X(j\omega)|$, vamos a utilizar dos valores de referencia:

- Cuando $\omega = 0$, tenemos que $|X(0)| = \frac{1}{\sqrt{a^2}} = \frac{1}{a}$
- Cuando $\omega = a$, tenemos que $|X(a)| = \frac{1}{a\sqrt{2}}$

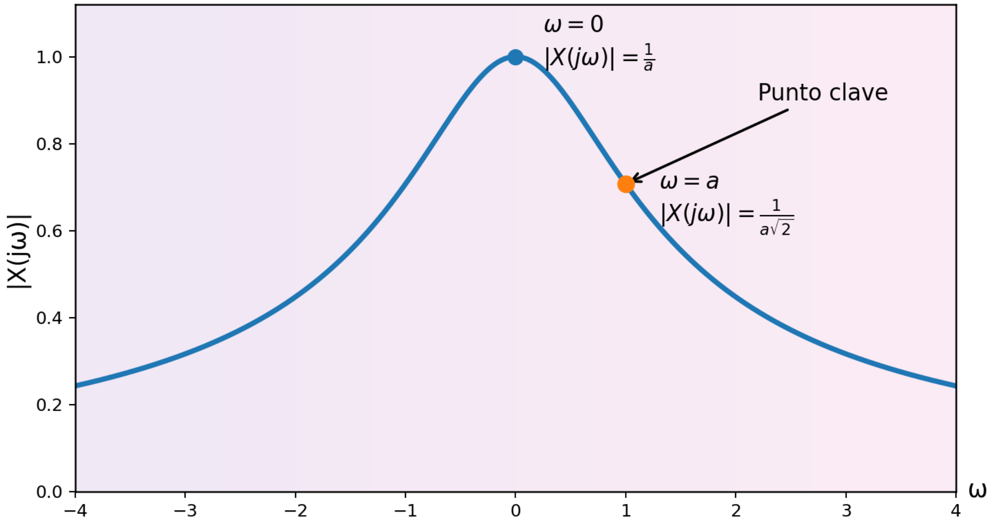

Figura 93. Ejemplo 34: Magnitud del espectro de la señal $e^{-at}u(t)$.

Se observa que el valor máximo de la magnitud del espectro ocurre en $\omega = 0$, y corresponde a $1/a$. A medida que la frecuencia aumenta, la magnitud disminuye de forma suave. En particular, cuando $\omega = a$, la magnitud se reduce a $1/(a\sqrt{2})$, lo que indica una caída significativa en el contenido espectral.

Nota aclaratoria:

Esta señal es importante dentro de comunicaciones, dado que su espectro presenta un comportamiento similar al de un filtro pasa-bajo. En particular, concentra su mayor energía en bajas frecuencias (alrededor de ω=0) y atenúa progresivamente las componentes de alta frecuencia a medida que ω aumenta.

Ejemplo 35. TF de señal exponencial real bilateral

En este ejemplo, vamos a trabajar también con la señal exponencial real, pero en este caso, la versión bilateral. Esta señal exponencial tiene dos componentes, una señal creciente para los valores negativos de tiempo, y una señal decreciente para los valores positivos de tiempo.

Es decir,

$$x(t) = \begin{cases} e^{at} & t < 0 \\ e^{-at} & t > 0 \end{cases}$$

Esta señal se puede escribir de forma compacta, así:

$$x(t) = e^{-a|t|}$$

Dado que para los tiempos positivos $|t| = t$; mientras que, para los tiempos negativos $|t| = -t$.

Como esta señal tiene dos componentes, aplicamos la ecuación de la TF en dos partes, así:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{0} e^{at}\, e^{-j\omega t}\, dt + \int_{0}^{\infty} e^{-at}\, e^{-j\omega t}\, dt$$

Resolviendo,

$$\int_{-\infty}^{0} e^{(a-j\omega)t}\, dt = \left[\frac{e^{(a-j\omega)t}}{(a-j\omega)}\right]_{-\infty}^{0} = \frac{1}{(a-j\omega)}$$

$$\int_{0}^{\infty} e^{-(a+j\omega)t}\, dt = \frac{1}{(a+j\omega)}$$

Y entonces, tenemos que:

$$X(j\omega) = \frac{1}{(a-j\omega)} + \frac{1}{(a+j\omega)} = \frac{2a}{(a^2+\omega^2)}$$

A diferencia de la señal exponencial unilateral, cuyo espectro es complejo, en este caso el espectro es completamente real y simétrico, por lo que $|X(j\omega)| = X(j\omega)$. Esto se debe a que la señal en el dominio del tiempo es par.

Para realizar la gráfica de $|X(j\omega)|$, vamos a utilizar dos valores de referencia:

- Cuando $\omega = 0$, tenemos que $|X(0)| = \frac{2a}{a^2} = \frac{2}{a}$
- Cuando $\omega = a$, tenemos que $|X(a)| = \frac{2a}{2a^2} = \frac{1}{a}$

Vamos ahora a comparer la magnitude de los espectros de la señal exponencial unilateral real, con el de la señal exponencial bilateral real.

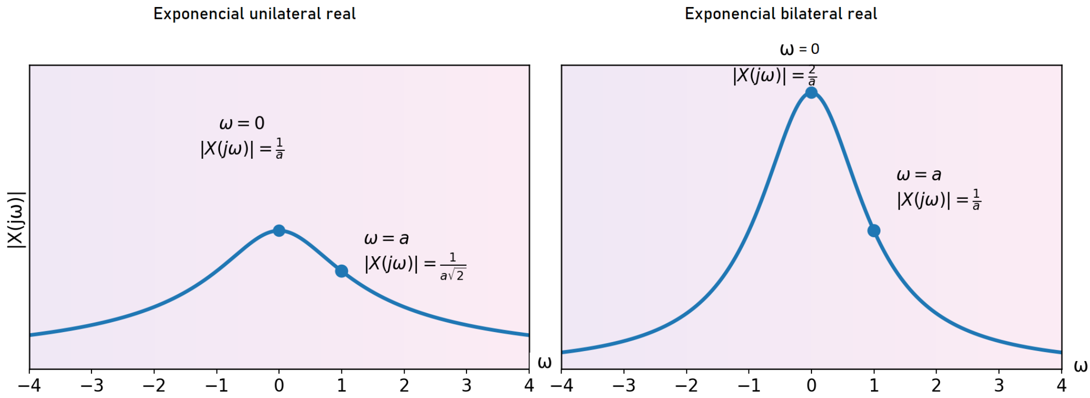

Figura 94. Ejemplo 35: Comparación de espectros de señales exponenciales unilateral y bilateral.

Comparando el espectro de la señal exponencial bilateral real con el de la señal exponencial unilateral real, se observa que cuando $\omega = 0$ la amplitud de la señal exponencial bilateral es el doble. Por otro lado, cuando $\omega = a$, la amplitud es $1/a$, en comparación con aproximadamente $0.707/a$ en la señal exponencial unilateral.

Ejemplo 36. TF de señal impulso unitario en tiempo continuo

Sea la señal impulso unitario en tiempo continuo definida como:

$$x(t) = \delta(t)$$

La TF de la señal, se expresa de la siguiente forma:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

De manera intuitiva, $\delta(t)e^{-j\omega t}$ puede interpretarse considerando que el impulso unitario está completamente concentrado en $t = 0$. En ese punto, la exponencial compleja toma el valor de $e^{-j\omega 0}$, por lo que dentro de la integral el impulso selecciona únicamente ese valor.

Por lo tanto,

$$X(j\omega) = e^{-j\omega 0}$$

Y en consecuencia,

$$X(j\omega) = 1$$

Este ejercicio es muy importante en comunicaciones, ya que permite comprender una idea fundamental: la señal más concentrada en el dominio del tiempo, correspondiente al impulso unitario, posee el espectro más ancho posible, es decir, una constante de valor 1 para todas las frecuencias.

Ejemplo 37. TF de una señal constante en el tiempo

En este caso, la señal está definida como:

$$\boldsymbol{x(t) = 1},$$

Y su TF se expresa como:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}\, dt$$

Para obtener su espectro, utilizamos la propiedad de dualidad de la Transformada de Fourier.

Si $\delta(t) \overset{TF}{\rightarrow} 1$

Entonces por dualidad, $1 \overset{TF}{\rightarrow} 2\pi\delta(\omega)$

Por lo tanto,

$$X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega)$$

Este resultado indica que una señal constante en el tiempo contiene únicamente la componente de frecuencia cero, es decir, toda su información espectral está concentrada en $\omega = 0$.

Nota aclaratoria

De manera intuitiva, la propiedad de dualidad permite intercambiar el papel del tiempo y la frecuencia (es decir, $t \rightarrow \omega$, y $\omega \rightarrow t$). Matemáticamente, dicho intercambio introduce un factor 2π y una inversión en la variable. En este caso, esta inversión no altera el resultado, ya que el impulso es una función par.

En particular, para el caso de la señal impulso, se tiene que:

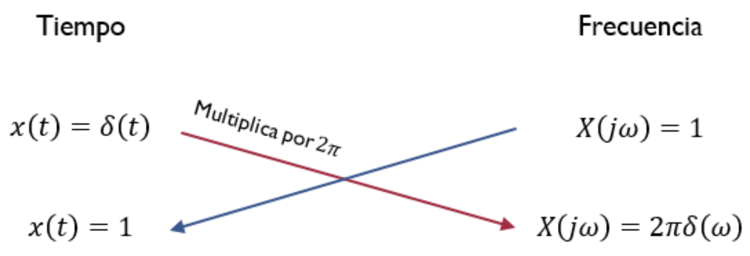

Figura 95. Ejemplo 37: Aplicación conceptual de la propiedad de dualidad para los pares $\delta(t) \rightarrow 1, y\ 1 \rightarrow 2\pi\delta(\omega)$.

Ejemplo 38. TF de la señal cuadrada aperiódica

Previamente, habíamos calculado el espectro de una señal cuadrada periódica, el cual es discreto, con infinitos impulsos, cuya envolvente es de la forma sinc. Ahora, calcularemos el espectro de la cuadrada aperiódica.

Sea x(t) una señal definida como:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T_1 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Donde $2T_1$ corresponde a la duración total de la señal (tiempo en alto).

Nota aclaratoria:

Esta definición es consistente con el caso de la señal cuadrada periódica, en la cual $2T_1$ representa el tiempo en que la señal permanece en nivel alto dentro de un período.

Entonces,

$$X(j\omega) = \frac{2\ sen(\omega T_1)}{\omega} = \frac{2T_1\ sen(\omega T_1)}{\omega T_1}$$

Este resultado indica que una señal limitada en el tiempo tiene un espectro continuo cuya forma es tipo sinc.

En particular:

- La mayor concentración de energía se encuentra alrededor de $\omega = 0$.
- El espectro presenta ceros en:

$$\omega = \pm\frac{\pi}{T_1}, \pm\frac{2\pi}{T_1}, \pm\frac{3\pi}{T_1}, \ldots$$

- A mayor duración de T_1, el espectro se hace más angosto.
- A menor duración de T_1, el espectro se ensancha.

La señal rectangular aperiódica mantiene la misma estructura temporal que la señal cuadrada periódica en su intervalo activo, pero sin repetición. Su espectro revela cómo esta duración finita se traduce en una distribución continua en el dominio de la frecuencia.

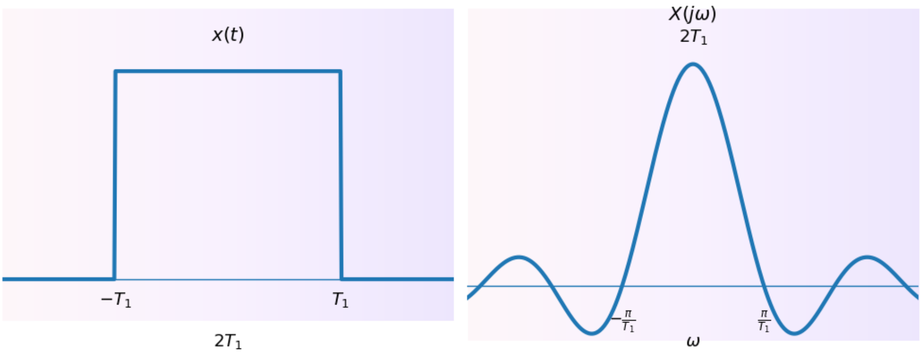

Figura 96. Ejemplo 38: señal cuadrada aperiódica, x(t) y $X(j\omega)$.

4.5. TABLA RESUMEN TF DE SEÑALES PERIÓDICAS Y APERIÓDICAS

Como cierre de esta sección, se presentan dos tablas resumen, una para señales periódicas y otra para señales aperiódicas, junto con sus respectivas representaciones en frecuencia. Estas síntesis permiten integrar los resultados obtenidos y ofrecen una visión global de la Transformada de Fourier, resaltando la relación entre el dominio del tiempo y el dominio de la frecuencia.

	Tiempo $x(t)$		Frecuencia $X(j\omega)$
Senoidal	$\sin(\omega_0 t)$	$\longleftrightarrow$	$\frac{\pi}{j}[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)]$
Cosenoidal	$\cos(\omega_0 t)$	$\longleftrightarrow$	$\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$
Tren de impulsos	$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)$	$\longleftrightarrow$	$\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\omega_0)$
Cuadrada periódica	$x(t)=\begin{cases}1 & -T_1\leq t\leq T_1,\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$	$\longleftrightarrow$	$2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\,\delta(\omega-k\omega_0)$

$$a_0=\frac{2T_1}{T},\qquad a_k=\frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi},\quad k\neq 0$$

Figura 97. Pares fundamentales de la Transformada de Fourier para señales periódicas. Las señales periódicas presentan espectros discretos compuestos por impulsos en múltiplos de la frecuencia fundamental.

	Tiempo $x(t)$		Frecuencia $X(j\omega)$
Impulso	$\delta(t)$	$\longleftrightarrow$	1
Constante	1	$\longleftrightarrow$	$2\pi\delta(\omega)$
Exp. unilateral	$e^{-at}u(t),\ a>0$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{a+j\omega}$
Exp. bilateral	$e^{-a\lvert t\rvert},\ a>0$	$\longleftrightarrow$	$\frac{2a}{a^2+\omega^2}$
Rectangular	$x(t)=1,\ \lvert t\rvert\leq T_1$	$\longleftrightarrow$	$2T_1\frac{\sin(\omega T_1)}{\omega T_1}$

Figura 98. Pares fundamentales de la Transformada de Fourier para señales aperiódicas. Se observa cómo señales localizadas en el dominio del tiempo, como el impulso unitario, presentan espectros extendidos, mientras que señales extendidas en el tiempo, como la constante, se concentran en frecuencia. La señal rectangular ilustra un caso intermedio, evidenciando la relación entre duración temporal y ancho espectral.

4.6. PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

En esta parte final del capítulo abordaremos las propiedades de la Transformada de Fourier. Conocerlas permite determinar el espectro de señales más complejas a partir de transformadas básicas, aplicando de manera estratégica aquellas propiedades que simplifican el análisis.

Estas propiedades establecen una relación directa entre transformaciones en el dominio del tiempo y sus efectos en el dominio de la frecuencia, lo que permite interpretar y construir resultados sin necesidad de recalcular la integral de la Transformada de Fourier.

A continuación, se presentan las propiedades más importantes y representativas para comunicaciones.

4.6.1. Linealidad

Esta propiedad es muy similar a la de linealidad de la Serie de Fourier (el lector puede compararlas). Básicamente, si se conoce el espectro de dos señales y estas se suman en el dominio del tiempo, entonces sus espectros también se suman.

Adicionalmente, si cada señal se multiplica por un escalar, su espectro se multiplica por el mismo escalar.

Sea $x_1(t)$, $x_2(t)$, con TF:

$x_1(t) \overset{TF}{\rightarrow} X_1(j\omega)$

$x_2(t) \overset{TF}{\rightarrow} X_2(j\omega)$

Si estas señales se combinan linealmente de la forma:

$$x_3(t) = Ax_1(t) + Bx_2(t)$$

Entonces, su Transformada de Fourier se calcula así:

$x_3(t) \overset{TF}{\rightarrow} AX_1(j\omega) + BX_2(j\omega)$

Esta propiedad ya la hemos aplicado de forma intuitiva en algunos ejercicios, por ejemplo, cuando sumamos señales cosenoidales.

Cuando el espectro se expresa en Hz, la propiedad de escribe como:

$$x_3(t) \xrightarrow{TF} AX_1(jf) + BX_2(jf)$$

4.6.2. Desplazamiento en el dominio del tiempo

Sea $x_1(t)$ una señal con TF:

$$x_1(t) \xrightarrow{TF} X_1(j\omega)$$

Si esta señal se desplaza en el tiempo de la forma:

$$x_2(t) = x_1(t - t_0)$$

Entonces, la TF de la nueva señal está dada por:

$$x_2(t) \xrightarrow{TF} e^{-j\omega t_0} X_1(j\omega)$$

De lo anterior, se deduce que un desplazamiento en el tiempo no altera la magnitud del espectro, pero sí introduce un cambio en la fase.

Cuando el espectro se expresa en Hz, la propiedad de escribe como:

$$x_2(t) \xrightarrow{TF} e^{-j2\pi f t_0} X_1(jf)$$

4.6.3. Escalamiento en el tiempo

Sea $x_1(t)$ una señal con TF:

$$x_1(t) \xrightarrow{TF} X_1(j\omega)$$

Si esta señal se escala en el tiempo:

$$x_2(t) = x_1(at)$$

Entonces, la TF de la nueva señal está dada por:

$$x_2(t) \xrightarrow{TF} \frac{1}{|a|} X_1\left(\frac{j\omega}{a}\right)$$

El escalamiento en el dominio del tiempo genera un efecto contrario en el dominio de la frecuencia. Por ejemplo, si comprimo una señal en el tiempo, su espectro se dilata; y viceversa.

Nota aclaratoria:

Si te preguntas qué significa $X_1\left(\frac{j\omega}{a}\right)$, su interpretación es directa: en la expresión del espectro original $X_1(j\omega)$, se reempleza la variable ω por $\frac{\omega}{a}$.

Si el espectro lo expresas en Hz, la propiedad de escalamiento queda, así:

$$x_2(t) \xrightarrow{TF} \frac{1}{|a|} X_1\left(\frac{jf}{a}\right)$$

Ejemplo 39. Compresión de una señal cosenoidal

Supongamos que tenemos la señal $x_1(t) = \cos(100\pi t)$, cuya frecuencia fundamental es $\omega_0 = 100\pi$. De acuerdo con nuestra tabla de TF de señales básicas periódicas, tenemos que el espectro es:

$$\cos(100\pi t) \xrightarrow{TF} \pi\{\delta(\omega - 100\pi) + \delta(\omega + 100\pi)\}$$

Ahora, vamos a suponer que esta señal se comprime por un factor de $a = 2$, entonces, la TF de la señal comprimida, que llamaremos $x_2(t)$ es:

$$x_2(t) \xrightarrow{TF} \frac{\pi}{2}\left\{\delta\left(\frac{\omega}{2} - 100\pi\right) + \delta\left(\frac{\omega}{2} + 100\pi\right)\right\}$$

El espectro de la señal lo podemos re-escribir así:

$$X_2(j\omega) = \frac{\pi}{2}\left\{\delta\left(\frac{\omega - 200\pi}{2}\right) + \delta\left(\frac{\omega + 200\pi}{2}\right)\right\}$$

Pero, ¿qué significa $\delta\left(\frac{\omega}{2}\right)$?$\delta\left(\frac{\omega}{2}\right)$?.

Recordando la interpretación del impulso continuo como el límite de una señal de ancho Δ muy pequeño y altura 1/Δ, se tiene que su área es igual a 1. Si esta señal se dilata en el eje de la variable (en este caso ω), su ancho pasa a ser 2Δ, por lo que se obtiene:

$$\delta\left(\frac{\omega}{2}\right) = 2\delta(\omega)$$

Y de forma general, la propiedad fundamental de escalamiento de la señal impulso, es:

$$\delta\left(\frac{\omega}{a}\right) = |a|\,\delta(\omega)$$

Teniendo en cuenta lo anterior, el espectro queda como:

$$X_2(j\omega) = \frac{\pi}{2}\{2\delta(\omega - 200\pi) + 2\delta(\omega + 200\pi)\}$$

Y cancelando la constante de 2, tenemos que:

$$X_2(j\omega) = \pi\{\delta(\omega - 200\pi) + \delta(\omega + 200\pi)\}$$

Se observa que al comprimir la señal en el tiempo por un factor de 2, las frecuencias se expanden por el mismo factor, duplicando la frecuencia fundamental. Este resultado es consistente con el espectro de la señal $\cos(200\pi t)$, el cual es la versión comprimida de la señal $\cos(100\pi t)$, por un factor de $a = 2$.

Nota aclaratoria:

En la señal original el periodo es $T = \frac{2\pi}{100\pi} = 0.02$; mientras que, en la señal comprimida el periodo es $T = \frac{2\pi}{200\pi} = 0.01$, es decir, la mitad del periodo de la señal original.

Ejemplo 40. Dilatación de una señal cosenoidal

Partimos de la misma señal del ejemplo anterior $x_1(t) = \cos(100\pi t)$, con $\omega_0 = 100\pi$, cuyo espectro es:

$$\cos(100\pi t) \xrightarrow{TF} \pi\{\delta(\omega - 100\pi) + \delta(\omega + 100\pi)\}$$

Ahora, vamos a suponer que esta señal se dilata la señal por un factor $a = 0.5$, entonces, la TF de la señal dilatada, que llamaremos $x_2(t)$ es:

$$x_2(t) \xrightarrow{TF} \frac{\pi}{0.5}\left\{\delta\left(\frac{\omega}{0.5} - 100\pi\right) + \delta\left(\frac{\omega}{0.5} + 100\pi\right)\right\}$$

El espectro de la señal lo podemos re-escribir así:

$$X_2(j\omega) = 2\pi\left\{\delta\left(\frac{\omega - 50\pi}{0.5}\right) + \delta\left(\frac{\omega + 50\pi}{0.5}\right)\right\}$$

Aplicando la propiedad de escalamiento de la señal impulso continua, tenemos que:

$$\delta\left(\frac{\omega}{0.5}\right) = 0.5\delta(\omega)$$

Teniendo en cuenta lo anterior, el espectro queda como:

$$X_2(j\omega) = \frac{2\pi}{2}\{\delta(\omega - 50\pi) + \delta(\omega + 50\pi)\}$$

Y cancelando la constante de 2, tenemos que:

$$X_2(j\omega) = \pi\{\delta(\omega - 50\pi) + \delta(\omega + 50\pi)\}$$

Se observa que al dilatar la señal en el tiempo por un factor de 0.5, las frecuencias se comprimen por el mismo factor, reduciendo a la mitad la frecuencia fundamental. Este resultado es consistente con el espectro de la señal $\cos(50\pi t)$, el cual es la versión dilatada de la señal $\cos(100\pi t)$, por un factor de $a = 1/2$.

4.6.4. Multiplicación en el dominio del tiempo

Sea $x_1(t)$, $x_2(t)$, con TF:

$$x_1(t) \xrightarrow{TF} X_1(j\omega)$$

$$x_2(t) \xrightarrow{TF} X_2(j\omega)$$

Si estas señales se multiplican, así:

$$x_3(t) = x_1(t).x_2(t)$$

Entonces, la TF de la nueva señal se obtiene como:

$$X_3(j\omega) = \frac{1}{2\pi}[X_1(j\omega) \circledast X_2(j\omega)]$$

Donde $\circledast$ es el operador de convolución. Es decir, se realiza la convolución discreta entre los espectros de la señales.

De forma equivalente, si el espectro se expresa en Hz:

$$X_3(jf) = [X_1(jf) \circledast X_2(jf)]$$

Es importante notar que, a diferencia de lo que podría esperarse, el producto en el tiempo no produce un producto en frecuencia, sino una convolución.

Ejemplo 41. Modulación en amplitud

La propiedad de multiplicación de la Transformada de Fourier es fundamental en sistemas de comunicación, particularmente en **modulación en amplitud (AM)**. Multiplicar una señal por una portadora cosenoidal en el dominio del tiempo produce un **desplazamiento de su espectro en frecuencia**, permitiendo transportar información hacia bandas de frecuencia más altas.

Vamos a aplicar esta propiedad, con la multiplicación de dos señales, de la primera conocemos su dominio del tiempo, y de la segunda, su espectro.

Sea,

$$x_1(t) = \cos(100\pi t),$$

y una señal $x_2(t)$ cuyo espectro es:

- Triángulo centrado en $\omega = 0$, de amplitud 1, en el rango de -10π hasta 10π, como se presenta en la siguiente figura.

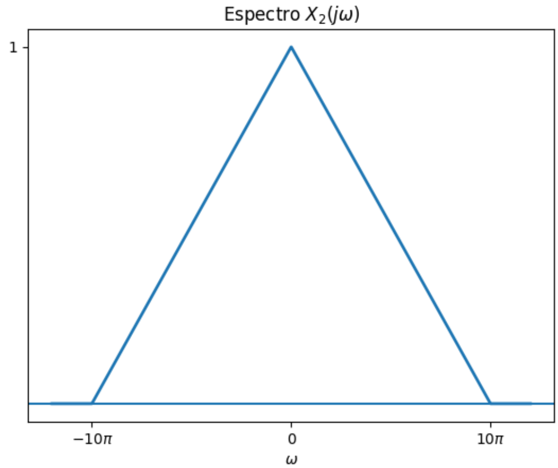

Figura 99. Ejemplo 41: Espectro de la señal x2(t).

Se desea graficar $X_3(j\omega)$ y $X_3(jf)$.

Como paso inicial, vamos a obtener el espectro de $x_1(t)$, el cual es:

$X_1(j\omega) = \pi\{\delta(\omega - 100\pi) + \delta(\omega + 100\pi)\}$

Entonces, aplicamos la propiedad de multiplicación de la TF, y realizamos la convolución entre cada impulse de $X_1(j\omega)$ con el espectro $X_2(j\omega)$.

Es decir, desplazamos el espectro de $X_2(j\omega)$ a cada una de las ubicaciones en frecuencia de $X_1(j\omega)$, quedando:

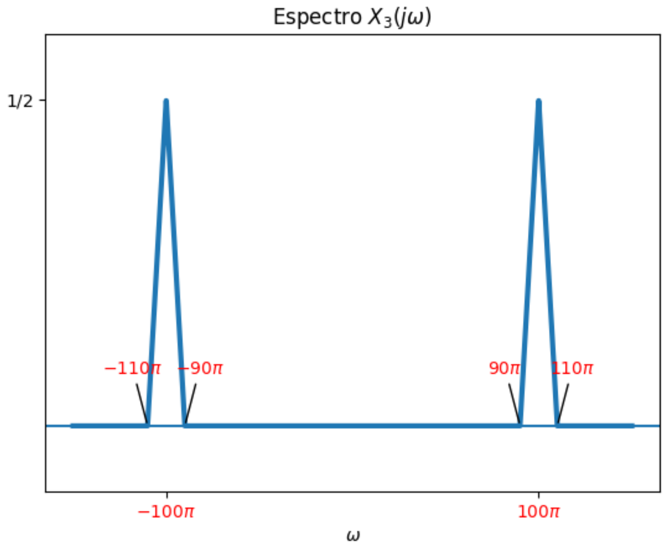

Figura 100. Ejemplo 41: Espectro $X_3(j\omega)$.

A manera de resumen de la aplicación de la propiedad de multiplicación:

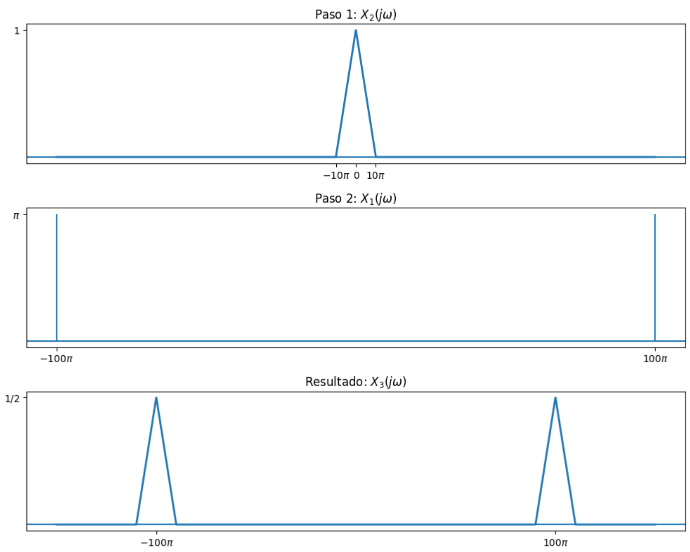

Figura 101. Ejemplo 41: pasos de aplicación de la propiedad de multiplicación.

4.6.5. Convolución en el dominio del tiempo

Esta propiedad es la contraparte de la propiedad de multiplicación de la TF. En este caso, las señales se convolucionan en el tiempo, mientras que, sus espectros se multiplican.

Sea $x_1(t)$, $x_2(t)$, con TF:

$$x_1(t) \xrightarrow{TF} X_1(j\omega)$$

$$x_2(t) \xrightarrow{TF} X_2(j\omega)$$

Si estas señales se convolucionan, así:

$$x_3(t) = x_1(t) \circledast x_2(t)$$

Entonces, la TF de la nueva señal se obtiene como:

$$X_3(j\omega) = X_1(j\omega)X_2(j\omega)$$

Ahora, si el espectro lo queremos expresar en [Hz], el resultado en frecuencia se representa así:

$$X_3(jf) = X_1(jf)X_2(jf)$$

Nota aclaratoria:

En la propiedad de convolución en el dominio del tiempo, no aparece ningún escalar que diferencie la expresión del espectro entre $X_3(j\omega)$ y $X_3(jf)$, ya que en frecuencia el resultado corresponde a una multiplicación directa.

En contraste, en la propiedad de multiplicación en el dominio del tiempo, si aparece un factor de escala al expresar el espectro en en ω, debido a que la operación en frecuencia es una convolución, la cual implica una integral que se ve afectada por el cambio de variable entre f y ω.

4.6.6. Dualidad

La propiedad de dualidad intercambia los dominios de tiempo y frecuencia, pero requiere especial cuidado en el manejo de constantes y en la interpretación de las variables.

Esta propiedad ya la habíamos trabajado de forma intuitiva en el Ejemplo 37. Ahora la veremos formalmente. En esta propiedad podemos "intercambiar" las señales en el dominio del tiempo y el dominio de la frecuencia, aplicando las siguientes "reglas":

- Partiendo de $x(t)$ se reemplaza $t \to \omega$ y se multiplica su amplitud por un factor de escala 2 π. Posteriormente se realiza una inversión en el espectro (este paso se omite si la señal $x(t)$ era par) y así obtenemos $x(j\omega)$.
- Partiendo de $X(j\omega)$ se reemplaza $\omega \to t$, y así obtenemos $X(t)$.

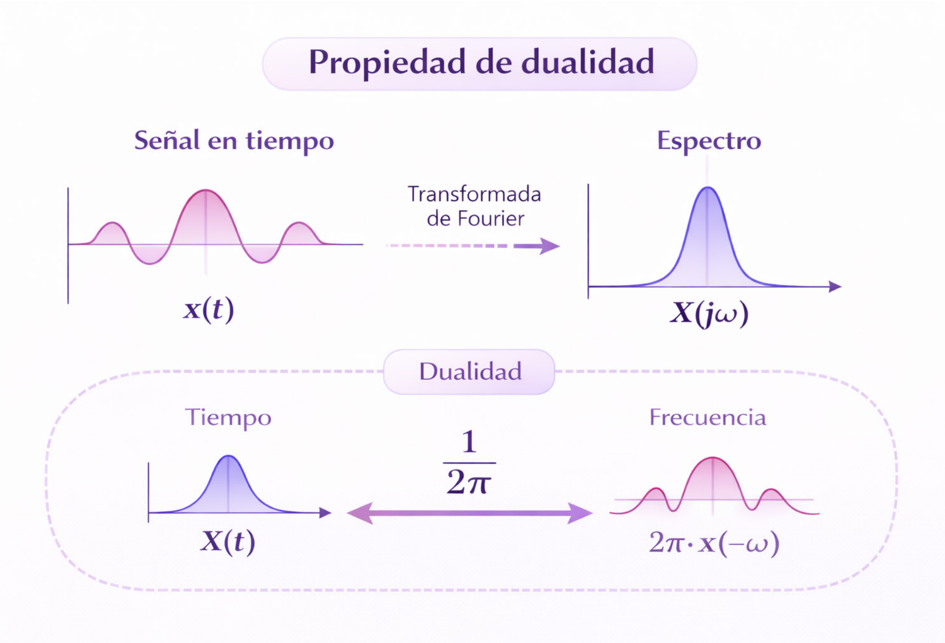

Figura 102. Propiedad de Dualidad.

Nota aclaratoria:

Cuando la señal $x(t)$ es par, no hay necesidad de realizar inversion en el espectro al momento de sustituir $t \rightarrow \omega$.

Ejemplo 42. Propiedad de dualidad de la señal exponencial bilateral

Queremos identificar la señal en el dominio del tiempo, cuyo espectro es $X(j\omega) = e^{-a|\omega|}$. Este espectro es simétrico respecto al origen, es decir, es par.

Partimos de la pareja conocida:

$$x(t) = e^{-a|t|} \xrightarrow{TF} X(j\omega) = \frac{2a}{(a^2 + \omega^2)}$$

Nos damos cuenta que nuestro espectro es una señal exponencial bilateral, pero está en el dominio de la frecuencia, y no del tiempo. Entonces, se hace necesario aplicar la propiedad de dualidad, para realizar “intercambio” de señales.

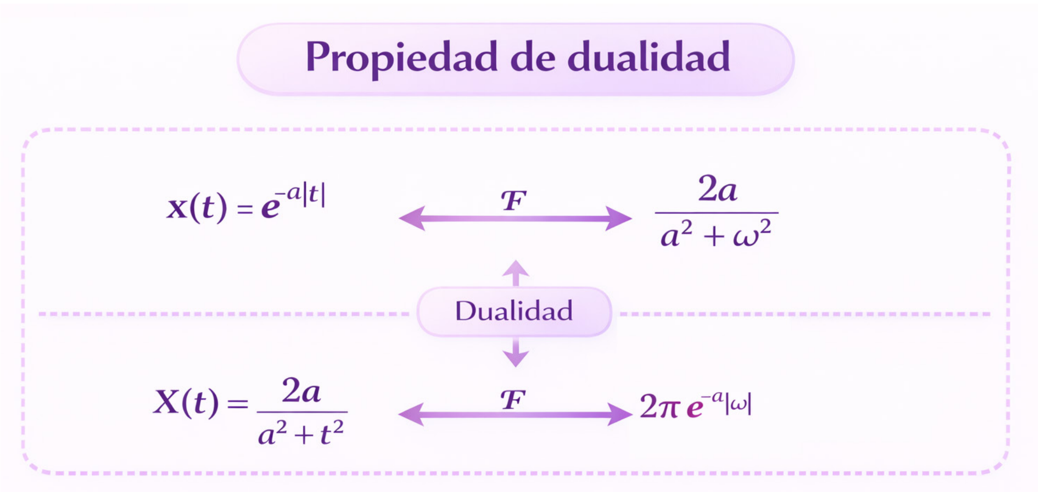

Figura 103. Ejemplo 42: propiedad de dualidad de la señal exponencial bilateral.

Qué pasos realizamos:

- Escribimos en el dominio de la frecuencia la señal exponencial bilateral, multiplicando por 2π, es decir, nos queda como $X(j\omega) = 2\pi e^{-a|\omega|}$.
- Posteriormente, realizamos el cambio de variable de $\omega \rightarrow t$, llegando a $x(t) = \frac{2a}{a^2+t^2}$
- Dado que la pareja obtenida por dualidad produce $\boldsymbol{X(j\omega)} = 2\pi\boldsymbol{e}^{-a|\omega|}$, y el espectro dado es $\boldsymbol{e}^{-a|\omega|}$, se require un factor de escala $\frac{1}{2\pi}$ para ajustarlo.

Por lo tanto, la señal en el dominio del tiempo cuyo espectro es $\boldsymbol{X(j\omega)} = \boldsymbol{e}^{-a|\omega|}$ es:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{2a}{a^2 + t^2}$$

4.6.7. Relación de Parseval

Nos sirve para calcular la energía total de una señal a partir del dominio del tiempo o del dominio de la frecuencia, por medio de la siguiente ecuación:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(jf)|^2 df$$

O su equivalente cuando el espectro se expresa en [rad/s], así:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

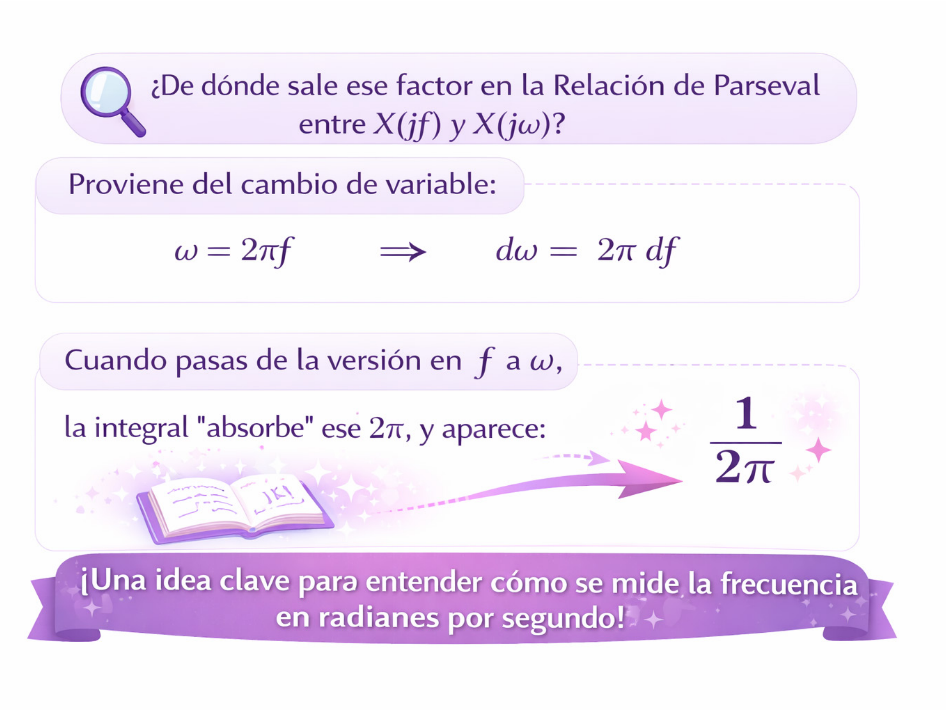

Figura 104. Relación de Parseval:

explicación del factor de escala entre $X(jf)$ y $X(j\omega)$.

4.7. Transformada de Fourier utilizando Python

Hasta ahora, hemos trabajado la Transformada de Fourier con señales analíticas y ejemplos controlados. Sin embargo, una de sus aplicaciones más importantes en ingeniería aparece cuando analizamos señales reales, como la voz. En este caso, la TF permite identificar cómo se distribuye la energía de la señal en función de la frecuencia, revelando componentes que no siempre son evidentes al observar únicamente la forma de onda en el tiempo.

En una señal de voz, el dominio del tiempo muestra cómo varía la amplitud a lo largo del tiempo, mientras que el dominio de la frecuencia permite observar qué componentes espectrales están presentes. Esta representación es especialmente útil para estudiar características como el tono, la presencia de armónicos y la concentración de energía en ciertas bandas de frecuencia.

En el caso de señales digitales, como las que se procesan en Python, se trabaja con una versión discreta de la señal, por lo que en la práctica se utiliza la Transformada Discreta de Fourier (DFT), calculada eficientemente mediante la Fast Fourier Transform (FFT).

Ejemplo 43. Análisis espectral señal de voz con ruido externo tipo tono

Vamos a suponer que tenemos una grabación de una señal de voz, pero que tuvo una interferencia debido a la adición (superposición) de un tono. Queremos conocer tanto el comportamiento en frecuencia del mensaje original, así como, identificar la posición en frecuencia de ese tono. En otras palabras, en el dominio del tiempo tuvimos que:

$$x_{noise}(t) = x(t) + n(t)$$

Donde x(t) es el mensaje de voz original, n(t) corresponde a una señal cosenoidal de frecuencia desconocida, y $x_{noise}(t)$ es la señal resultante, en la cual al escucharla notaremos un "pitido".

Conociendo la propiedad de linealidad de la TF, sabemos que el espectro de x_{noise} es la suma lineal del espectro del mensaje de voz original y el espectro de la señal cosenoidal, el cual, como bien sabemos, es un "tono" en su frecuencia fundamenta.

Inicialmente, cargamos el audio e incluimos un botón de reproducción para poderlo escuchar dentro de Colaboratory.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import librosa
from IPython.display import Audio, display

# ==========================
# 1. Cargar archivo de audio
# ==========================
audio_path = "audio.wav"   # Cambia por el nombre o la ruta de tu archivo
x, fs = librosa.load(audio_path, sr=None)

print("frecuencia de muestro del audio:", fs)

# ==========================
# 2. Reproducir audio
# ==========================
display(Audio(x, rate=fs))
```

Figura 105. Ejemplo 43: código en Phyton para el cargue y reproducción del audio.

Posteriormente, utilizando la librería de numpy, calculamos la fft de la señal, seleccionamos solamente sus frecuencias positivas, calculamos su magnitud, y graficamos.

```python
# ==========================
# 3. Calcular la FFT
# ==========================
N = len(x)                          # Número de muestras
X = np.fft.fft(x)                   # Transformada de Fourier
f = np.fft.fftfreq(N, d=1/fs)       # Vector de frecuencias

# ==========================
# 4. Tomar solo frecuencias positivas
# ==========================
mask = f >= 0
f_pos = f[mask]
X_pos = X[mask]

# ==========================
# 5. Magnitud del espectro
# ==========================
X_mag = np.abs(X_pos) / N

# ==========================
# 6. Graficar espectro
# ==========================
plt.figure(figsize=(10, 5))
plt.plot(f_pos, X_mag)
plt.xlabel("Frecuencia [Hz]")
plt.ylabel("Magnitud")
plt.title(r"$|X_{noise}(jf)|$")

plt.grid(True)
plt.show()
```

Figura 106. Ejemplo 43: código en Phyton para el cálculo de la fft de una señal de voz.

Obteniendo:

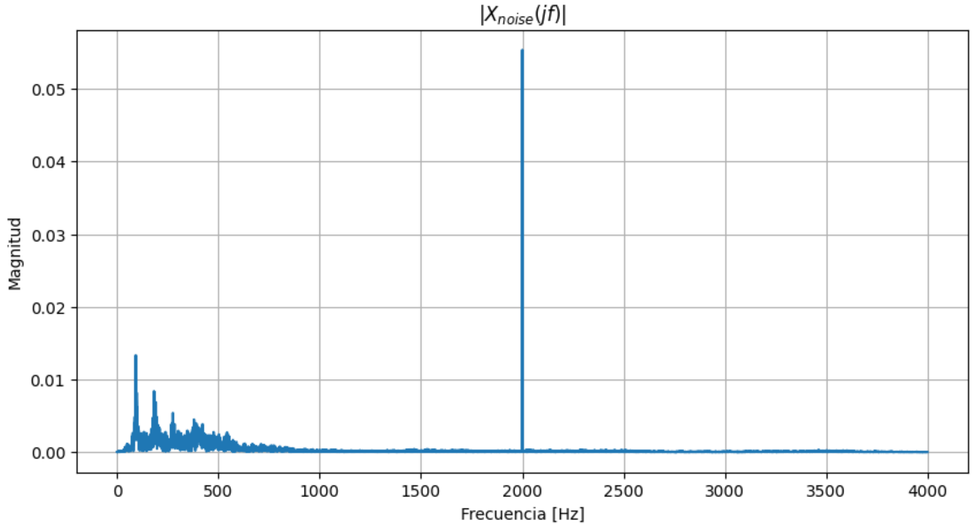

Figura 107. Ejemplo 43: espectro de la señal de voz ruidosa.

A partir de la gráfica del espectro obtenida, podemos apreciar que el tono se ubica alrededor de los 2000 Hz, mientras que el espectro del mensaje de voz original se concentra por debajo de los 800 Hz, aproximadamente.

En este punto, es natural preguntarse:

¿qué utilidad tiene esta representación en frecuencia dentro de un sistema de comunicaciones?

Los sistemas modernos incorporan en su receptor unidades de preprocesamiento que permiten reducir el ruido presente en la señal, como ocurre aquí con el tono interferente. El diseño de filtros digitales para eliminar este tipo de perturbaciones constituye uno de los pilares del Procesamiento Digital de Señales.

Quiero que te quedes con algo más que una gráfica: la intuición de que toda señal puede ser entendida… y también transformada. Lo que acabamos de hacer (escuchar, analizar e identificar una interferencia) es solo el comienzo.

En el próximo semestre daremos ese siguiente paso: diseñar sistemas que modifiquen las señales de manera intencional, por ejemplo, eliminando ese "pitido" que hoy identificamos. Ese camino lo recorreremos en Procesamiento Digital de Señales, apoyándonos en el libro de mi autoría titulado "*Procesamiento digital de señales utilizando Python"* de la editorial Redipe.

Por ahora, cierra este capitulo con la satisfacción de haber aprendido a escuchar los datos… en este caso, literalmente.