

emplean procedimientos algorítmicos y heurísticos. En la solución de problemas de optimización, cálculo de derivadas e integrales.

CONCLUSIONES

De la misma forma que en la Educación General, las líneas directrices resultan de utilidad al profesor universitario, pues estas contribuyen, entre otros aspectos, a la organización didáctica de los contenidos en las asignaturas de la Matemática Superior, así como la dirección del proceso de enseñanza-aprendizaje. Explicitan lo esencial a lograr desde el punto de vista de los objetivos, lo que posibilita el ordenamiento de los contenidos y la orientación didáctica de su tratamiento. Es por esta razón, que los profesores de las asignaturas de la disciplina Matemática Superior deben tener conciencia de la existencia de estas líneas directrices lo que contribuirá a un fortalecimiento de la ciencia matemática como herramienta para la resolución de múltiples problemas de la futura profesión de sus estudiantes.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Álvarez, Marta, et al. (2014). *El proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática. Documentos metodológicos*. Editorial Pueblo y Educación. La Habana.
- Ballester, S, et al. (2018) *Didáctica de la Matemática*. Editorial Félix Varela. La Habana.
- Jorge, M & Valdivia, M. (2019) *Estrategias para resolver problemas de optimización en carreras de ciencias técnicas*. VII Simposio Internacional de Educación y Pedagogía. Capítulo del Libro Electrónico de Investigación. ISBN 978-1-951198-15-2. En Coedición Editorial REDIPE Capítulo Estados Instituciones sede, 2019.
- Jorge, M & Valdivia, M. (2018). *Técnicas para la dirección del aprendizaje de la Matemática*. Evento Internacional La enseñanza de la Matemática, la Estadística y la Computación. Varadero. Matanzas. Noviembre 2018

EL ÁLGEBRA LINEAL. SU UTILIZACION EN LA SEGMENTACIÓN DE IMÁGENES

Autores: Yasell Sánchez Rodríguez⁴, Boris Alvarez González⁵, Irisdalys Pino Sánchez⁶.

⁴ yasel.sanchez@umcc.cu, Lic. Matemática. Profesor de matemática. Profesor Instructor. Universidad de Matanzas. Matanzas: Cuba. <https://orcid.org/0000-0003-3884-0593>

⁵ boris.gonzalez@umcc.cu, Lic. Educación especialidad Ciencias Exactas. Máster en Matemática Educativa. Profesor de matemática. Profesor Auxiliar. Jefe de la disciplina Matemática Básica. Universidad de Matanzas. Matanzas: Cuba. <https://orcid.org/0000-0002-1139-360X>

RESUMEN

El Álgebra Lineal tiene una gran cantidad de aplicaciones sin embargo se suele abordar casi siempre de una forma bastante abstracta. Así que para motivar a nuestros estudiantes se propone realizar actividades académicas que hicieran uso de conceptos teóricos del Álgebra Lineal de una forma práctica, útil e interesante. Las imágenes digitales se pueden asociar a matrices donde cada elemento de la matriz coincide con el nivel de gris dentro de una escala de grises. Por este motivo, muchas herramientas del Álgebra Lineal son frecuentemente utilizadas en el procesamiento de imágenes. Por otro lado, se ha comprobado cómo nuestros estudiantes encuentran la asignatura más atractiva, a partir de esta vinculación de la Matemática a la vida práctica.

Palabras clave: Motivación, álgebra lineal, imágenes.

SUMMARY

The Lineal Algebra has a great quantity of applications however it is usually approached almost always in a quite abstract way. So to motivate our students he/she intends to be carried out academic activities that made use of theoretical concepts of the Lineal Algebra in a practical, useful and interesting way. The digital images can associate to wombs where each element of the womb coincides with the level of gray inside a scale of gray. For this reason, many tools of the Lineal Algebra are frequently used in the prosecution of images. On the other hand, he/she has been proven how our students find the most attractive subject, starting from this linking of the Mathematical one to the practical life.

Key words: Motivation, lineal algebra, images.

LE RESUME

L'Algèbre Linéale a une grande quantité de candidatures qu'il est approché dans un chemin tout à fait abstrait habituellement presque toujours cependant. Donc motiver nos étudiants nous projetons d'être porté dehors activités académiques qui ont fait usage de concepts théoriques de l'Algèbre Linéale dans un chemin pratique, utile et intéressant. Les images numériques peuvent associer à utérus où chaque élément de l'utérus coïncide avec le niveau de gris à l'intérieur d'une échelle de gris. Pour cette raison, beaucoup d'outils de l'Algèbre Linéale sont fréquemment utilisés dans la poursuite d'images. De l'autre côté, l'he/she a été

⁶ irisdalys.pino@umcc.cu, Lic. Educación especialidad Matemática. Máster en Matemática Educativa. Profesora de Matemática. Profesor Asistente. Universidad de Matanzas. Matanzas: Cuba. <https://orcid.org/0000-0001-9066-4158>

prouvé comme nos étudiants trouvent le sujet le plus attirant, en commençant de ceci lier du Mathématique à la vie pratique.

Les mots de la clef: Motivation, algèbre linéale, images,

INTRODUCCIÓN

Las asignaturas de Matemática se suelen presentar como Matemáticas excesivamente teóricas y alejadas de las aplicaciones reales. Generalmente, los profesores de Matemática aplican o adecuan poco nuestras asignaturas al contexto en el que están. Este trabajo se va a centrar en la asignatura de Álgebra Lineal para Ingeniería Informática.

Basta con analizar lo que se hace en las universidades cubanas para comprobar que los programas, problemas, etc. de Álgebra Lineal son bastante parecidos en cualquier titulación universitaria. La mayoría de las veces, la parte práctica de la asignatura se reduce a la clásica relación de problemas tan habituales en Matemáticas.

Por supuesto, la relación de problemas debe formar parte de nuestro quehacer docente, pero en este trabajo se plantea hacer además algo más.

El objetivo es el de presentar a los alumnos aplicaciones prácticas del Álgebra Lineal en áreas de interés para un ingeniero. Con esto se pretende que los alumnos aprendan Álgebra Lineal sabiendo en qué temas relacionados con sus estudios se utilizan, para que así valoren más los conocimientos que están adquiriendo. Se busca así atraer el interés del alumnado y fomentar la motivación ya que de esa forma se mejora el proceso de enseñanza y aprendizaje del Álgebra Lineal.

El Álgebra Lineal es una parte de las Matemáticas que está adquiriendo una gran importancia en los últimos años. Así, por ejemplo, las imágenes digitales en escala de grises no son más que matrices donde cada elemento de la matriz coincide con el nivel de gris del píxel correspondiente. Si la imagen es una imagen en color RGB entonces cada elemento de la matriz será una terna (r, g, b) con la cantidad de rojo, verde y azul presentes en el color del píxel correspondiente (el color es una combinación de los tres colores primarios, Red Green Blue), en definitiva, una imagen en color se corresponde con tres matrices. Por esta razón, en el procesamiento de imágenes digitales se utilizan muchas técnicas del cálculo matricial.

En este trabajo se destacan algunas de las aplicaciones del Álgebra Lineal al procesamiento de imágenes digitales:

- La compresión JPEG de una imagen se implementa a través de un producto matricial con matrices ortogonales.

- La edición de imágenes para hacer un fotomontaje se puede llevar a cabo resolviendo un sistema lineal de ecuaciones.

- El coloreado de una imagen digital en escala de grises puede hacerse resolviendo también un sistema lineal de ecuaciones.

El análisis de imágenes comprende todos los métodos y técnicas que se utilizan para extraer información de una imagen. El primer paso para ello lo constituye la segmentación de imágenes que se ocupa de descomponer una imagen en sus partes constituyentes, es decir, los objetos de interés y el fondo, basándose en ciertas características locales que nos permiten distinguir un objeto del fondo y objetos entre sí.

Se puede distinguir entre segmentación completa, cuando las regiones disjuntas corresponden directamente a objetos de la imagen y segmentación parcial, cuando las regiones no se corresponden directamente con objetos de la imagen. Para conseguir la segmentación completa se necesita un nivel superior de conocimiento que utiliza un conocimiento específico del dominio de la escena.

Este conocimiento de nivel superior puede ser, por ejemplo, que los objetos de la imagen corresponden a caracteres numéricos o letras de un alfabeto.

La operación de segmentación trata de distinguir si un píxel pertenece, o no, a un objeto de interés y, por lo tanto, produce una imagen binaria. Todavía no hay una teoría unificada de la segmentación de imágenes, solamente se dispone de un conjunto de algoritmos.

DESARROLLO

Los algoritmos de segmentación de imágenes monocromáticas se basan en alguna de las tres propiedades siguientes:

- a) Discontinuidad en los tonos de gris de los píxeles de un entorno, que permite detectar puntos aislados, líneas y aristas (bordes).
- b) Similitudes en los tonos de gris de los píxeles de un entorno, que permite construir regiones por división y fusión, por crecimiento o por umbralización.
- c) Conectividad de los píxeles desempeña un papel importante en la segmentación de imágenes.

Recordemos que una región D se dice conexa o conectada si para cada par de píxeles de la región existe un camino formado por píxeles de D que los conecta. Un camino de píxeles es una secuencia de píxeles adyacentes (que pertenecen a su entorno inmediato).

Los métodos de segmentación se pueden agrupar en cuatro clases diferentes:

- a) Métodos basados en píxeles, que a su vez pueden ser:

- locales (basadas en las propiedades de los píxeles y su entorno)
- globales (basadas en la información global obtenida, por ejemplo, con el histograma de la imagen).
- b) Métodos basados en bordes.
- c) Métodos basados en regiones, que utilizan las nociones de homogeneidad y proximidad geométrica, como las técnicas de crecimiento, fusión o división.
- d) Métodos basados en modelos.

El primer paso en cualquier proceso de análisis de imagen es la segmentación. Mediante la segmentación vamos a dividir la imagen en las partes u objetos que la forman. El nivel al que se realiza esta subdivisión depende de la aplicación en particular, es decir, la segmentación terminará cuando se hayan detectado todos los objetos de interés para la aplicación. En general, la segmentación automática es una de las tareas más complicadas dentro del procesado de imagen.

Los algoritmos de segmentación de imagen generalmente se basan en dos propiedades básicas de los niveles de gris de la imagen: discontinuidad y similitud. Dentro de la primera categoría se intenta dividir la imagen basándose en los cambios bruscos en el nivel de gris. Las áreas de interés en esta categoría son la detección de puntos, de líneas y de bordes en la imagen. Las áreas dentro de la segunda categoría están basadas en las técnicas de umbrales, crecimiento de regiones, y técnicas de división y fusión. En este trabajo se presenta un algoritmo para segmentar imágenes empleando el método de la potencia, utilizando propiedades gráficas de semejanza, obteniendo así, buenos resultados.

La segmentación de la imagen consiste en subdividir la imagen en sus partes constituyentes y extraer aquellas partes de interés (objetos). La segmentación es un proceso de agrupamiento (clustering, en inglés). Al "clustering" también se le llama aprendizaje no supervisado y es una técnica poderosa en clasificación de patrones.

Proceso de Clustering

Dado un conjunto de objetos, el proceso de clustering debe encontrar grupos cuyos elementos sean similares entre sí, y a la vez diferentes a los elementos de los otros grupos. Los grupos con esas características son conocidos como clusters. Los objetos son representados por D atributos descriptores en forma de vectores en el espacio R^D , y con una medida de comparación de la similitud, como la distancia, se conformarían los clusters con objetos similares.

En el proceso de la conformación de los grupos, que en adelante será conocido como clustering, no existe conocimiento previo acerca de cómo se debe conformar un cluster; por tal motivo, el proceso de clustering es también conocido como Clasificación no supervisada. Los tipos de objetos varían de acuerdo con el contexto de la aplicación del clustering; por ejemplo, en las tareas de clasificación dentro del *data mining*, los objetos serán registros de la base de datos; en la recuperación de la información los objetos serían documentos; y en procesamiento de imágenes los objetos serán los píxeles que conforman la imagen. El clustering tiene múltiples aplicaciones dentro de las ciencias de la computación, como compresión de imágenes y voz digitalizadas ; en la recuperación de informaciones relacionadas ; en el *data mining*, donde se buscan grupos con ciertas características de interés (por ejemplo, descubrimiento de nuevos segmentos de clientes con el fin de mejorar los servicios que brinda una determinada empresa); en la segmentación de imágenes para dividir la imagen en regiones homogéneas (según alguna característica de interés como la intensidad, color o textura), en aplicaciones médicas ,clasificación de imágenes satelitales en zonas (urbana, bosques, ríos). (Hervella, 2006).

Segmentación

La segmentación subdivide una imagen en sus partes constituyentes u objetos, con el fin de separar las partes de interés del resto de la imagen, por lo tanto, el nivel al que se lleva a cabo esta subdivisión depende del problema a resolver.

Algunas de las tareas fundamentales del procesamiento digital de imágenes son: 1) Mejoramiento de una imagen digital con fines interpretativos, y 2) Toma de decisiones de manera automática de acuerdo al contenido de la imagen digital.

Una imagen puede ser definida como una función bidimensional de intensidad de luz $f(x,y)$, donde x e y representan las coordenadas espaciales y el valor de f en un punto cualquiera (x,y) es proporcional al brillo (o nivel de gris) de la imagen en ese punto. Una imagen digital es una imagen $f(x,y)$ que se ha discretizado tanto en las coordenadas espaciales como en el brillo; y puede considerarse como una matriz cuyos índices de fila y de columna identifican un punto de la imagen y el valor del correspondiente elemento de la matriz indica el nivel de gris en ese punto. Los elementos de una distribución digital de este tipo se denominan elementos de la imagen o más comúnmente píxeles, abreviatura de su denominación inglesa "*picture elements*".

Los algoritmos de segmentación de imágenes monocromáticas generalmente se basan en una de las dos propiedades básicas de los valores del nivel de gris: discontinuidad y similaridad.

En la discontinuidad el método consiste en dividir una imagen basándose en los cambios bruscos del nivel de gris. Los temas más importantes en la discontinuidad son: a) detección de puntos aislados, y b) detección de líneas y c) detección de bordes de una imagen. En la similaridad, se presenta la regularidad en los valores del nivel de gris, los principales métodos están basados en: a) umbralización, b) crecimiento de región, y c) división y fusión de regiones. (La Serna & Román, 2007). Técnicas basadas en agrupamiento de píxeles en regiones. Tienen un enfoque de clasificación de píxeles, donde:

Las regiones resultantes deben tener cierto significado para el procesamiento posterior.

Píxeles de regiones distintas deben ser no-similares.

Píxeles de una misma región deben ser similares: niveles de gris, texturas, etc. (Bustince, 2010).

A una imagen se le puede asociar una gráfica donde cada píxel representa un nodo y cada par de píxeles determina una arista con un peso asociado w_{ij} que depende de la similitud entre los píxeles, por ejemplo, en cercanía espacial o en afinidad de color. A su vez cada gráfica tiene algunas matrices asociadas. La segmentación de imágenes se traducen una partición de la gráfica asociada, la que a su vez puede ser determinada estudiando las propiedades de las matrices asociadas.

Algunos conceptos importantes relacionados con las gráficas son (Ávalos, 2007):

-Gráfica: Es un par de conjuntos (V, E) , donde V es un conjunto finito de puntos v_1, v_2, \dots, v_n llamados vértices o nodos y E es un conjunto finito de aristas e_{ij} , cada uno de las cuales une pares ordenados de vértices y se les puede asignar un valor denotado por w_{ij} , el cual será el peso de la arista.

-Grado de un vértice: Si las aristas tienen un peso asignado, el grado del vértice es la suma de todos los pesos de las aristas que inciden en él. Se denota por $d_i = \sum_j w_{ij}$. Es frecuente

tomar $w_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si existe la arista } e_{ij} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$

en cuyo caso d_i es el número de aristas incidentes en el vértice i .

-Gráfica convexa: Una gráfica G es convexa si existe una arista entre cualesquiera dos de sus vértices.

-Subgráfica: Sea $A(V_1; E_1)$ una gráfica, A es una subgráfica de G si $V_1 \subset V$ y $E_1 \subset E$.

-Volumen de una subgráfica: Es la suma de los grados de los nodos que pertenecen a la subgráfica A . Se denota por $V(A) = \sum_{i \in A} d_i$

-Corte de una gráfica: Es la suma de los pesos de las aristas que son eliminadas para particionar la gráfica. Se denota por $Cut(A, B) = \sum_{i \in A, j \in B} w_{ij}$.

Para que $Cut(A, B)$ no tienda a hacer particiones se introduce un nuevo criterio de partición, llamado corte normalizado, el cual se denota por $NCut(A, B)$. La siguiente relación muestra la correspondencia con el corte mínimo: (Lorenti, 2014).

$$NCut(A, B) = \frac{Cut(A;B)}{V(A)} + \frac{Cut(A;B)}{V(B)}$$

-Matriz de Incidencia: Una gráfica no dirigida con n vértices y m aristas tiene asociada una matriz, llamada matriz de incidencia, formada de la siguiente manera: en la columna correspondiente a una arista e hay un 1 en el renglón correspondiente a un vértice de e y un -1 en el renglón correspondiente al otro vértice de e y el resto de los elementos de esa columna son cero.

-Matriz de Adyacencia: Si G es una gráfica con n vértices la matriz $A(G)$ de dimensión $n \times n$, cuyo elemento a_{ij} es 1 si existe la arista e_{ij} y cero en otro caso, es llamada matriz adyacente de G .

-Matriz diagonal de grados: Es una matriz diagonal denotada por D , donde el elemento (i, i) es igual al grado del nodo i , en términos de $A(G)$, $d_i = \sum_j a_{ij}$.

Cociente de Rayleigh

Si nos limitamos a calcular la sucesión (X_n) hasta obtener una aproximación x adecuada del vector propio se puede obtener el valor propio resolviendo el sistema vectorial $\lambda = Ax$. Este sistema resulta, en general, incompatible por no ser x exactamente un vector propio, sino solo una aproximación, por lo que la solución que mejor se ajusta es la pseudosolución del sistema, que nos dará una aproximación del valor propio λ .

$$\lambda x^* x = x^* x A \rightarrow \lambda = \frac{x^* x A}{x^* x}$$

Dada una matriz cuadrada A y un vector x , se denomina cociente de Rayleigh del vector x respecto de la matriz A al cociente $\frac{x^* x A}{x^* x}$.

Se puede, por tanto, obtener una aproximación del vector propio por un método iterado para más tarde aproximar el valor propio mediante el cociente de Rayleigh.

Matriz Laplaciana

Matriz Laplaciana: Sea G una gráfica con n vértices y un conjunto E de aristas. El Laplaciano de G , denotado por $L(G)$, es una matriz de dimensión $n \times n$ con elementos:

$$L_{ij} = \begin{cases} d_{ij} & \text{si } i = j \\ -a_{ij} & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

que es lo mismo que $L(G) = D - A$.

Propiedades

1. $L = D - A$, donde A es la matriz adyacente y D es la matriz diagonal de grados
2. $L = I_G T_G T_G^T$, donde IG es la matriz de incidencia de G.
3. L es una matriz simétrica semidefinida positiva. Así, todos los valores propios de L son reales y no negativos, L tiene un conjunto completo de n vectores propios reales y ortogonales.
4. Si la gráfica G tiene c componentes conexas, entonces L tiene c valores propios que son iguales a 0.
5. Para cualquier vector x,

$$x^T Lx = \sum_{\{i,j\} \in E} E_{ij} (x_i - x_j)^2$$

6. Para algún vector x, y los escalares α y β $(\alpha x + \beta e)^T L(\alpha x + \beta e) = \alpha^2 x^T Lx$ donde $e = [1, 1, \dots, 1]^T$ de dimensión n.

Teorema de Fielder

Teorema (Fielder): Sea G una gráfica convexa, L el Laplaciano de G; G_1 y G_2 una partición de G, entonces:

$$\lambda_2 = \frac{y_2^T D^{-1/2} L D^{-1/2} y_2}{y_2^T y_2}$$

Donde λ_2 es el segundo valor propio más pequeño del Laplaciano Normalizado $D^{-1/2} L D^{-1/2}$ y y_2 es su correspondiente vector propio.

El signo de los elementos de y_2 determinan la partición $G_1; G_2$ a saber $i \in G_1$ si $y_i > 0$, $i \in G_2$ si $y_i < 0$. El valor propio λ_2 es conocido como el valor propio de Fielder y y_2 como el vector propio de Fielder. (Hervella, 2006).

Corte normalizado

El criterio de corte normalizado de gráficas se puede aplicar a una imagen puesto que en este caso cada píxel de la imagen representa un nodo en la gráfica y cada par de pixeles determina una arista. Los pesos de las aristas que unen los vértices deben reflejar la probabilidad de que dos pixeles pertenezcan a un mismo objeto dentro de la imagen. En imágenes de intensidad tradicionales es posible utilizar el valor de intensidad del píxel y su ubicación espacial. Los pesos de cada arista se pueden calcular por la siguiente función de afinidad:

afinidad: $w_{ij} = e^{-\frac{\|F(i)-F(j)\|_2^2}{\|\sigma_F\|_2^2}} * e^{-\frac{\|X(i)-X(j)\|_2^2}{\|\sigma_X\|_2^2}}$ donde $F(i)$ y $F(j)$ son las intensidades de los nodos i y j respectivamente, $\|F(i) - F(j)\|_2^2$ representa la afinidad que hay entre cada par

de pixeles, $X(i)$ y $X(j)$ son las coordenadas dentro de la matriz de los nodos i y j respectivamente, y $\|X(i) - X(j)\|_2^2$ es la distancia entre los pixeles i y j ; $\|\sigma_F^2\|_2^2$ y $\|\sigma_X^2\|_2^2$ son la varianza de la afinidad y la asociación respectivamente.

Cuando las imágenes están en escala de grises, a cada píxel se le hace corresponder un tono de gris y una ubicación dentro de la imagen. (Hervella, 2006).

Método de la Potencia

Este método calcula el valor propio de máximo módulo de la matriz A y el vector propio asociado. Considerando λ_1 como el valor propio de máximo módulo, la forma de calcularlo es aplicando la siguiente recurrencia según (García, 2003):

$$y^{(k)} = Ay^{k-1} = A^{(k)}y^{(0)} \text{ con } k=1,2,\dots \text{ y } \frac{y_p^{(k+1)}}{y_p^{(k)}} \rightarrow \lambda_1$$

Para que se pueda aplicar es necesario que:

λ_1 es tal que domina a todos los demás valores propios, es (estrictamente mayor): Por tanto, si λ_1 es complejo no nos sirve, ya que existe otro valor propio con el mismo módulo, su conjugado.

La matriz A sea diagonalizable. Una matriz A es diagonalizable si y solo si dado un conjunto de vectores $\{v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(n)}\}$, estos son base de \mathbb{R}^n

Se construye por tanto la sucesión:

$$\begin{aligned} y^{(0)} &= \sum_{i=1}^n \alpha_i v^{(i)} \\ y^{(1)} &= \sum_{i=1}^n \alpha_i A v^{(i)} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i v^{(i)} \\ y^{(2)} &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i v^{(i)} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i^2 v^{(i)} \\ &\quad \cdot \\ &\quad \cdot \\ &\quad \cdot \\ y^{(m)} &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i^m v^{(i)} \\ &= \lambda_1^m (\alpha_1 v^{(1)} + \sum_{i=2}^n \alpha_i \frac{\lambda_i^m}{\lambda_1^m} v^{(i)}) \end{aligned}$$

Al hacer el límite, $\lim_{m \rightarrow \infty} y^{(m)} = Cv^{(1)}$ con $C = \lambda_1^m \alpha_1$

Y ahora se construye otra sucesión

$$\mu_{m+1} = \frac{y_k^{(m+1)}}{y_k^{(m)}} = \frac{\lambda_1^{m+1}(\alpha_1 v_k^{(1)} + \sum_{i=2}^n \alpha_i \frac{\lambda_i^m}{\lambda_1^m} v_k^{(i)})}{\lambda_1^m(\alpha_1 v_k^{(1)} + \sum_{i=2}^n \alpha_i \frac{\lambda_i^m}{\lambda_1^m} v_k^{(i)})}$$

Donde v_k es la k-ésima componente del vector v y y_k la del vector y .

Para esta sucesión, si $\alpha_1 \neq 0$ y $v_k^{(1)} \neq 0$, $\lim_{m \rightarrow \infty} \mu_{m+1} = \lambda_1$. Si $\lambda_1 > 1$, entonces $C \rightarrow \infty$, mientras que si $\lambda_1 < 1$, $C \rightarrow 0$, por lo que suele ser recomendable normalizar la sucesión, por ejemplo con la norma infinito:

$$p/|y_p^{(k)}| = \|y^{(k)}\|_\infty \rightarrow z^{(k)} = \frac{y^{(k)}}{y_p^{(k)}} \text{ entonces } z_p^{(k)} = 1 \text{ o } z_p^{(k)} = -1$$

Ahora la recurrencia nos queda

$$z^{(k)} = \frac{y^{(k)}}{y_p^{(k)}} \\ y^{(k+1)} = Az^{(k)} \\ \mu_k = y_p^{(k+1)}$$

Usando el cociente de Rayleigh

$$\sigma_{k+1} = \frac{y^{(k)t} Ay^{(k)}}{y^{(k)t} y^{(k)}} = \frac{\|y^{(k)}\|_2 y^{(k)t} Ay^{(k)}}{\|y^{(k)}\|_2 y^{(k)t} y^{(k)}} = \frac{z^{(k)t} Az^{(k)}}{z^{(k)t} z^{(k)}} = \frac{z^{(k)t} y^{(k+1)}}{\|z^{(k)}\|_2^2}$$

Como $\|z^{(k)}\|_2^2 = 1$, entonces nos queda que el valor propio σ_{k+1} con vector propio asociado $y^{(k)}$ es $\sigma_{k+1} = z^{(k)t} y^{(k+1)}$

Vimos que de la forma anterior, el valor propio es:

$$\mu_m = \lambda_1 + o\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^m\right)$$

Mientras que, usando el coeficiente de Rayleigh tenemos

$$\sigma_m = \lambda_1 + o\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^{2m}\right)$$

Por tanto, usando el coeficiente de Rayleigh tiende más rápido al valor propio de mayor módulo. (Bustince, 2010).

Método de deflación

Este método lo que hace es “desinflar” el problema. Se utiliza un valor propio λ_1 y un vector propio $v^{(1)}$ para transformar A y obtener otro valor propio como valor propio de mayor módulo de una matriz de orden inferior.

Hay varias técnicas, alguna de las cuales vamos a comentar.

La deflación consiste en construir la matriz B transformando A de la siguiente forma:

$$B = A - \lambda_1 v^{(1)} x^t$$

Conociendo λ_1 y $v^{(1)}$ (valor propio de mayor módulo de A y su vector propio asociado).

Se quiere que $B = \{0, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ siendo λ_i para $i = 2, \dots, n$ los valores propios de la matriz A que nos faltan por calcular. Para ello,

$$Bv^{(1)} = Av^{(1)} - \lambda_1 v^{(1)} x^t v^{(1)} = 0v^{(1)} \Rightarrow x^t v^{(1)} = 1$$

Por tanto, se busca $x^t v^{(1)} = 1$

Vamos a ver dos de las técnicas de deflación: la deflación de Hotelling y la de Wielandt.

Hay otra que es la deflación por semejanza, pero no la vamos a ver. (Burden & Faires, 2010).

Deflación de Hotelling: se usa para matriz A simétrica

$$x^t = \frac{v^{(1)t}}{\|v^{(1)}\|_2}$$

Deflación de Wielandt:

$$Av^{(1)} = \lambda_1 v^{(1)}$$

$$\alpha_i v^{(1)} = \lambda_1 v_i^{(1)} \text{ con } v_i^{(1)} \neq 0$$

Siendo α_i la fila i de la matriz A y $v_i^{(1)}$ la componente i del vector propio asociado a λ_1 .

$$\frac{1}{\lambda_1 v_i^{(1)}} \alpha_i v^{(1)} = 1 \Rightarrow b_i = 0 \Rightarrow \hat{B} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$$

Así que hay que quitar la fila i y columna i de la matriz B. (Bustince, 2010).

Teorema: Supongamos que $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ son valores propios de A con sus vectores propios asociados $v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(n)}$ y λ_1 tiene multiplicidad 1. Sea x un vector tal que $x^T v^{(1)} = 1$.

Entonces la matriz $B = A - \lambda_1 v^{(1)} x^T$ tiene valores propios $0, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ con vectores propios $v^{(1)}, w^{(2)}, w^{(3)}, \dots, w^{(n)}$ donde $v^{(i)}$ y $w^{(i)}$ se relacionan mediante la ecuación:

$$v^{(i)} = (\lambda_i - \lambda_1) w^{(i)} + \lambda_1 (x^T w^{(i)}) v^{(1)}, \text{ para cada } i = 2, 3, \dots, n. \text{ (Burden \& Faires, 2010)}$$

ALGORITHM
9.4

Wielandt Deflation

To approximate the second most dominant eigenvalue and an associated eigenvector of the $n \times n$ matrix A given an approximation λ to the dominant eigenvalue, an approximation \mathbf{v} to a corresponding eigenvector, and a vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$:

INPUT dimension n ; matrix A ; approximate eigenvalue λ with eigenvector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$; vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$, tolerance TOL , maximum number of iterations N .

OUTPUT approximate eigenvalue μ ; approximate eigenvector \mathbf{u} or a message that the method fails.

Step 1 Let i be the smallest integer with $1 \leq i \leq n$ and $|v_i| = \max_{1 \leq j \leq n} |v_j|$.

Step 2 If $i \neq 1$ then
 for $k = 1, \dots, i-1$
 for $j = 1, \dots, i-1$
 set $b_{kj} = a_{kj} - \frac{v_k}{v_i} a_{ij}$.

Step 3 If $i \neq 1$ and $i \neq n$ then
 for $k = i, \dots, n-1$
 for $j = 1, \dots, i-1$
 set $b_{kj} = a_{k+1,j} - \frac{v_{k+1}}{v_i} a_{ij}$;
 $b_{jk} = a_{j,k+1} - \frac{v_j}{v_i} a_{k+1,i}$.

Step 4 If $i \neq n$ then
 for $k = i, \dots, n-1$
 for $j = i, \dots, n-1$
 set $b_{kj} = a_{k+1,j+1} - \frac{v_{k+1}}{v_i} a_{j+1,i}$.

Step 5 Perform the power method on the $(n-1) \times (n-1)$ matrix $B' = (b_{kj})$ with \mathbf{x} as initial approximation.

Step 6 If the method fails, then OUTPUT ('Method fails');
 STOP
 else let μ be the approximate eigenvalue and
 $\mathbf{w}' = (w'_1, \dots, w'_{n-1})^T$ the approximate eigenvector.

Step 7 If $i \neq 1$ then for $k = 1, \dots, i-1$ set $w_k = w'_k$.

Step 8 Set $w_i = 0$.

Step 9 If $i \neq n$ then for $k = i+1, \dots, n$ set $w_k = w'_{k-1}$.

Step 10 For $k = 1, \dots, n$
 set $u_k = (\mu - \lambda)w_k + \left(\sum_{j=1}^n a_{kj} w_j \right) \frac{v_k}{v_i}$.

(Compute the eigenvector using Eq. (9.6).)

Step 11 OUTPUT (μ, \mathbf{u}) ; (The procedure was successful).
 STOP.

Figura tomada de (Burden & Faires, 2010).

CONCLUSIONES

Se ha intentado trabajar dentro de la asignatura Álgebra Lineal de una forma diferente de la habitual en clase de Matemáticas. No solo se dedica a las clásicas sesiones de teoría y problemas en el aula, sino que además se introducirían aplicaciones útiles de los contenidos matemáticos estudiados en el aula a temas de interés para el alumnado. De esta forma se persigue motivar más a nuestros alumnos en el aprendizaje de la asignatura. Se ha procurado abordar temas actuales y cuya relevancia para un ingeniero técnico informático fuera indiscutible. Se cree que el resultado ha sido globalmente satisfactorio.

Se ha comenzado un material que será válido para cursos posteriores y que, por supuesto, se ampliará y mejorará. Las actividades estarán diseñadas para su uso por estudiantes de Ingeniería Informática pero también se pueden aprovechar para otras carreras, sobre todo para otras ingenierías. Desde este trabajo se anima a los profesores de Matemáticas a trabajar en ideas similares.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Ávalos, G. (2007). *Segmentación de imágenes mediante teoría espectral de gráficas*. Cohauila: Era.
- Burden, R., & Faires, J. D. (2010). *Numerical Analysis*. Youngstown: Brooks/Cole.
- Bustince, H. (2010). *Procesamiento de imagen. Utilización de técnicas de toma de decisión y aprendizaje*. Navarra: EUNSA.
- García, C. (2003). *Apuntes de Métodos Numéricos, 2o E.T.S.I.*. Málaga: Oceano.
- Hervella, S. (2006). *Editor de Imágenes basado en Regiones. Aplicación en entorno Matlab*. Barcelona: Tecno Libro.
- La Serna, N., & Román, U. (2007). *Técnicas de Segmentación en Procesamiento Digital de Imágenes*. San Marcos: DELMMI.
- Lorenti, L. R. (2014). *Segmentación espectral de imágenes obtenidas con cámaras de tiempo de vuelo*. La plata: Atlante.

ANÁLISIS DEL SONIDO CON LA TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER

Autores: Yasell Sánchez Rodríguez⁷, Boris Alvarez González⁸, Irisdalys Pino Sánchez⁹

RESUMEN

Este trabajo se trata sobre el uso de la Transformada Discreta de Fourier, en particular del método de cómputo más eficiente de esta transformada. Además, se evidencia la importancia de ella en el tratamiento de sonidos. Se muestra en este trabajo un breve panorama de cómo trabajar con los datos muestreados, la importancia del teorema de Nyquist y cómo se cuantifican los datos. Se explica el uso de la Transformada Rápida de Fourier y sus aplicaciones. Se observa como en MATLAB existe una función (fft) que permite un cómputo eficiente de la misma. Se aplica la transformada rápida de Fourier (fft) para calcular el espectro de frecuencias.

Palabras clave: Transformadas, Fourier, sonido.

ABSTRACT

This work is about the use the Discrete Fourier Transform, in particular of the more efficient computational method of transformed. Also, the importance of this transformation is evidenced in the treatment of sounds. It is shown in this work a brief panorama of how to

⁷ Universidad de Matanzas "Camilo Cienfuegos". Profesor de matemática. yasel.sanchez@umcc.cu
<https://orcid.org/0000-0003-3884-0593>

⁸ Universidad de Matanzas "Camilo Cienfuegos". Profesor de matemática. Jefe de la disciplina Matemática Básica, boris.gonzalez@umcc.cu. <https://orcid.org/0000-0002-1139-360X>

⁹ Universidad de Matanzas "Camilo Cienfuegos". Profesora de matemática. irisdalys.pino@umcc.cu
<https://orcid.org/0000-0001-9066-4158>