Ávalos, G. (2007). *Segmentación de imágenes mediante teoría espectral de gráficas.* Cohauila: Era.

Burden, R., & Faires, J. D. (2010). *Numerical Analisis.* Youngstown: Brooks/Cole.

Bustince, H. (2010). *Procesamiento de imagen. Utilización de técnicas de toma de decisión y aprendizaje.* . Navarra: EUNSA.

García, C. (2003). *Apuntes de Métodos Numéricos,2o E.T.S.I.* . Málaga: Oceano.

Hervella, S. (2006). *Editor de Imágenes basado en Regiones.Aplicación en entorno Matlab.* Barcelona: Tecno Libro.

La Serna, N., & Román, U. (2007). *Técnicas de Segmentación en Procesamiento Digital de Imágenes.* San Marcos: DELMMI.

Lorenti, L. R. (2014). *Segmentación espectral de imágenes obtenidas con cámaras de tiempo de vuelo.* La plata: Atlante.

ANÁLISIS DEL SONIDO CON LA TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER

Autores: Yasell Sánchez Rodríguez[7], Boris Alvarez González[8], Irisdalys Pino Sánchez[9]

RESUMEN

Este trabajo se trata sobre el uso de la Transformada Discreta de Fourier, en particular del método de cómputo más eficiente de esta transformada. Además, se evidencia la importancia de ella en el tratamiento de sonidos. Se muestra en este trabajo un breve panorama de cómo trabajar con los datos muestreados, la importancia del teorema de Nyquist y cómo se cuantifican los datos. Se explica el uso de la Transformada Rápida de Fourier y sus aplicaciones. Se observa como en MATLAB existe una función (fft) que permite un cómputo eficiente de la misma. Se aplica la transformada rápida de Fourier (fft) para calcular el espectro de frecuencias.

Palabras clave: Transformadas, Fourier, sonido.

ABSTRACT

This work is about the use the Discrete Fourier Transform, in particular of the more efficient computational method of transformed. Also, the importance of this transformation is evidenced in the treatment of sounds. It is shown in this work a brief panorama of how to

[7] Universidad de Matanzas "Camilo Cienfuegos". Profesor de matemática. yasel.sanchez@umcc.cu https://orcid.org/0000-0003-3884-0593

[8] Universidad de Matanzas "Camilo Cienfuegos". Profesor de matemática. Jefe de la disciplina Matemática Básica, boris.gonzalez@umcc.cu. . https://orcid.org/0000-0002-1139-360X

[9] Universidad de Matanzas "Camilo Cienfuegos". Profesora de matemática. irisdalys.pino@umcc.cu https://orcid.org/0000-0001-9066-4158

work with the tested data, the importance of the theorem of Nyquist and how the data are quantified. The use is explained by the Fast Fourier Transform and its applications. It is observed how in MATLAB a function exists (fft) that allows an efficient computational transformed. We apply the Fast Fourier Transform (fft) to calculate the spectrum of frequencies**.**

Keywords: Transform, Fourier, sound.

LE RÉSUMÉ

Ce travail est au sujet de l'usage le Fourier Transform Discret, en particulier de la méthode computationelle plus effective d'a transformé. Aussi, l'importance de cette transformation est manifestée dans le traitement de sons. Il est montré dans ce travail un panorama bref de comment travailler avec le données testé, l'importance du théorème de Nyquist et comme les données sont mesurés. L'usage est expliqué par les Fourier Transform Rapides et ses candidatures. Il est observé comme dans MATLAB une fonction existe (fft) cela permet un effectif computationel a transformé. Nous appliquons le Fourier Transform Rapide (fft) calculer le spectre de fréquences.

Les mots-clé: Transformez, Fourier, son.

INTRODUCCIÓN

La invención de la serie de Fourier fue uno de los grandes avances de la ciencia del 1800. En el campo aplicado permitió resolver problemas de la física en relación al calor, el sonido, las ondas y de la atracción de los planetas; estos problemas generalmente se planteaban en términos de ecuaciones diferenciales parciales y en ese contexto la serie de Fourier surgió como una técnica para resolver estas ecuaciones. A raíz de estos avances, surgieron muchas dudas acerca de los conceptos de función y series infinitas lo que llevó a que en el campo del análisis estos conceptos se desarrollaran y formalizaran. Es así como gracias a la investigación de las series de Fourier, los matemáticos de la época se vieron forzados e inspirados a desarrollar y profundizar en la teoría de las funciones, cálculo de variaciones, expansiones en series, ecuaciones diferenciales ordinarias, álgebra y geometría diferencial.

Uno de estos problemas es el tratamiento y manejo de señales. Una señal es una variable física que contiene o transporta información. Algunos tipos de señales son: tensión, sonido, imagen, temperatura captada por un sensor, movimiento, etc. Es de interés, especialmente, las señales que varían en el tiempo. Las señales variables en el tiempo pueden representarse mediante una función del tiempo f(t). Estas señales pueden ser de dos tipos: continuas o discretas. (Jiménez, 2013)

El sonido es un fenómeno físico que consiste en variaciones oscilatorias de la presión del aire, provocadas por la vibración de un cuerpo y que estimulan nuestro sentido del oído. La onda sonora es precisamente la representación del sonido como la variación de determinada magnitud física en el tiempo, la cual puede ser la presión del aire, la desviación de una cuerda o membrana vibrante respecto a su posición de equilibrio, el voltaje en un equipo electrónico capaz de registrar sonidos, etc. En el tratamiento de señales se utiliza, entre otros, la Transformada Discreta de Fourier, la cual recibe el nombre en honor a Jean-Baptiste Joseph Fourier. Para el uso más eficiente computacionalmente de dicha transformada, se descubrió la Transformada Rápida de Fourier, cuyo algoritmo más eficaz es publicado por James Cooley y John Wilder Tukey, que consiste en resolver la transformada discreta realizando menos operaciones computacionales. Con las herramientas de tecnología como MATLAB hacen mucho más fácil la solución de estos problemas. (Arteaga Bastidas, 2010)

DESARROLLO

MATLAB es el nombre abreviado de "MATrixLABoratory". Es un lenguaje de alto nivel y de ambiente interactivo que permite realizar tareas intensas y con una mayor velocidad que los lenguajes de programación comúnmente usados. MATLAB se especializa en cálculos numéricos con vectores y matrices, como casos particulares puede trabajar también con otras estructuras de información. Aunque cada objeto es considerado como un arreglo. El lenguaje está construido por código llamado M-code que puede ser fácilmente ejecutado en la ventana de comandos. Pero la razón principal para la elección de este lenguaje de programación son las herramientas que proporciona para el procesamiento de señales, y el conjunto de funciones para el procesamiento digital. Además, para crear entornos gráficos se puede utilizar el GUIDE de MATLAB, que provee herramientas para crear GUIs, "Graphical User Interface".

Un segmento de sonido de voz o sonido musical se puede escribir entonces como, $f(t) = \sum_{k=1}^{K} f_k(t) = \sum_{k=1}^{K} a_k(t)\cos\varphi_k(t)$, (1)

donde $a_k(t)$ es la amplitud, $\varphi_k(t) = \omega_0 t + \varphi_0$ es la fase, ω_0 es la frecuencia instantánea (derivada de la fase), medida en radianes/segundo. El análisis de los armónicos que componen una onda compleja, sus frecuencias, amplitudes y fases, constituyen un elemento básico del procesamiento digital de señales (siglas DSP en inglés) y en particular de muchos de los mecanismos que se realizan para almacenar, generar o transformar sonidos.

En los sonidos musicales, la sensación del tono o nota de los mismos se debe a un tipo de relación muy particular entre los armónicos que componen la onda compleja. Entre ellos existe un armónico fundamental cuya frecuencia ω determinala nota que escuchamos, mientras que las frecuencias del resto son $2\omega, 3\omega, 4\omega$,etc.

Para comprimir el sonido por un factor α en el tiempo, sin modificar los valores

de φ_k y a_k, se sintetiza$g(t) = \sum_{k=1}^{K} a_k(\alpha t) \cos(\frac{1}{\alpha} \varphi_k(\alpha t))$, (2)

Una transposición de frecuencia se obtiene multiplicando cada fase por una

constante α

$g(t) = \sum_{k=1}^{K} b_k(t) \cos(\alpha \varphi_k(t))$, (3)

Cuando se aplica la transformada de Fourier a un fragmento de la señal original, se obtiene una descomposición espectral de la misma, o sea, un vector de coeficientes, cada uno de los cuales indica con qué amplitud y fase aparece cada frecuencia en el sonido original. A estos coeficientes puede efectuárseles alguna transformación y luego, al aplicarles la transformada inversa de Fourier obtenemos una nueva señal modificada respecto a la original. La tarea es implementar un programa general en el sentido de que permita experimentar con diferentes valores de los parámetros que:

a) Sintetice sonidos con el modelo (1), donde las amplitudes y las fases se calculen

con una transformada de Fourier

b) Que modifique la duración del sonido con la fórmula (2)

c) Que transponga la frecuencia del sonido con (3)

El sonido es un agente físico que se manifiesta en forma de energía vibratoria y que es causa de la sensación auditiva siempre que las vibraciones se mantengan dentro de ciertos límites. Las ondas acústicas son vibraciones mecánicas de puntos materiales, que, por propagación en un medio elástico, llegan al oído y perturban su equilibrio. En general, se acostumbra a distinguir entre sonido y ruido, calificando al primero como una perturbación periódica, de carácter musical. El sonido se propaga en el aire, a 0°C y a la presión de 1 atm, a la velocidad de 331,4 m/s. Para que las vibraciones emitidas por la fuente acústica sean apreciadas por el oído humano es necesario que pasen de los 16 períodos por segundo (16 Hz) y que sean inferiores a los 20.000 Hz. (Crespo, 2009). Los caracteres distintivos de un sonido son: la intensidad, que depende de la amplitud de las vibraciones; la altura, que está relacionada con la frecuencia de las vibraciones de la onda sonora, y el timbre, que depende del número e intensidad de los armónicos. El sonido está formado por una serie de ondas de compresión y enrarecimiento que transmiten energía cinética por el interior de medios materiales.

En el vacío el sonido no se puede propagar, ya que necesita de un medio que le haga de soporte. Los sonidos se generan todos en elementos que se encuentran en vibración, vibración que se transmite al medio y que a través de él llegan hasta el tímpano. En el oído son transformados en impulsos eléctricos que se transmiten hasta el cerebro donde son interpretados. Las ondas sonoras son de tipo longitudinal y consisten en una serie de compresiones y enrarecimientos sucesivos. Para poner esto de manifiesto se puede considerar el caso de un diapasón que vibra. Cada uno de los golpes de sus varillas produce al golpear hacia afuera una compresión, para acto seguido dar lugar a un enrarecimiento al batir hacia dentro, seguido de nuevo por una compresión, etc. De este modo se dice que un ciclo está compuesto en esta oscilación por una compresión y un enrarecimiento y la longitud de onda de dicha perturbación es la distancia que separados compresiones, o dos enrarecimientos sucesivos. Para caracterizar el sonido se emplean dos nociones que, si bien no son propiamente científicas, permiten describirlo con una cierta aproximación. Estas nociones son las de altura, relacionada con la frecuencia y la de volumen que está vinculada con la intensidad. Sin embargo, una descripción precisa de las ondas sonoras debe basarse en los conceptos de frecuencia e intensidad de la perturbación. La frecuencia de las ondas sonoras se define como el número de oscilaciones que se producen en un segundo y se mide mediante la unidad llamada que equivale a un ciclo por segundo. La intensidad, por su parte, es la potencia que atraviesa en un segundo una superficie unidad perpendicular a la dirección de propagación de la perturbación sonora. La unidad en la que se expresa es el decibel (dB), si bien no existe una escala absoluta de medida, ya que la escala existente toma como nivel o la intensidad mínima audible, que es un concepto relativo. Existe asimismo una relación entre la intensidad del sonido, la amplitud y la frecuencia de la perturbación y el medio que le sirve de soporte, siendo así que cuanto mayor es la densidad del medio tanto menor es la intensidad sonora y cuanto mayor es la amplitud menor es la frecuencia. (Colemar, 2010).

Muestreo y Teorema de Nyquist.

El muestreo consiste en el proceso de conversión de señales continuas a señales discretas en el tiempo, es un paso para digitalizar una señal analógica. Este proceso se realiza midiendo la señal en momentos periódicos del tiempo. En cuanto al muestreo existe un teorema muy importante, el Teorema de Nyquist.

El teorema de muestreo de Nyquist-Shannon, también conocido como teorema de muestreo de Whittaker-Nyquist-Kotelnikov-Shannon, teorema de Nyquist, es un teorema fundamental de la teoría de la información, de especial interés en las telecomunicaciones.

El teorema trata del muestreo, que no debe ser confundido o asociado con la cuantificación, proceso que sigue al de muestreo en la digitalización de una señal y que, al contrario del muestreo, no es reversible (se produce una pérdida de información en el proceso de cuantificación, incluso en el caso ideal teórico, que se traduce en una distorsión conocida como error o ruido de cuantificación y que establece un límite teórico superior a la relación señal-ruido).

El ingeniero sueco Harry Nyquist formuló el siguiente teorema para obtener una grabación digital de calidad: "La frecuencia de muestreo mínima requerida para realizar una grabación digital de calidad, debe ser igual al doble de la frecuencia de audio de la señal analógica que se pretenda digitalizar y grabar".

Este teorema recibe también el nombre de "Condición de Nyquist". Es decir, que la tasa de muestreo se debe realizar, al menos, al doble de la frecuencia de los sonidos más agudos que puede captar el oído humano que son 20 mil Hertz por segundo (20 kHz). Por ese motivo se escogió la frecuencia de 44,1 kHz como tasa de muestreo para obtener "calidad de CD", pues al ser un poco más del doble de 20 kHz, incluye las frecuencias más altas que el sentido del oído puede captar. (Colemar, 2010).

Tasa de muestreo = doble de la frecuencia.

En la cuantificación el valor de cada muestra de la señal se representa como un valor elegido de entre un conjunto finito de posibles valores. Se conoce como error de cuantificación (o ruido), a la diferencia entre la señal de entrada (sin cuantificar) y la señal de salida (ya cuantificada), interesa que el ruido sea lo más bajo posible.

Series de Fourier

El siguiente análisis es ampliamente utilizado en ingeniería para señales que son una función del tiempo. Por esta razón se ha utilizado la variable independiente t que denota al tiempo. Se dice que $x(t)$ es una función periódica, si para todo t se cumple que: $x(t) = x(t+T)(*)$ A T se le denomina entonces período de la función $x(t)$. Al menor T que satisfaga (*) se le denomina período fundamental. Nótese que si $x(t)$es periódica con período T entonces: $x(t+2T) = x\big((t+T)+T\big) = x(t+T) = x(t)$ y en general $x(t+kT) = x\big((t+(k-1)T)+T\big) = x\big((t+(k-1)T)\big) = \cdots = x(t)$ tal que $k \in \mathbb{Z}$, es decir, una función periódica con periodo T también es periódica con periodo kT. Las funciones exponenciales complejas $s_k(t) = e^{jk\omega_0 t} = e^{j2\pi k f_0 t}$ con $k \in \mathbb{Z}$, son funciones periódicas que se dicen estar relacionadas armónicamente por tener todas un período común $T_p = \frac{1}{f_0}$. El período fundamental de la señal $s_k(t)$es $\frac{1}{kf_0} = \frac{T_p}{k}$, lo que equivale a una frecuencia kf_0. Puesto que una señal periódica con período $\frac{T_p}{k}$ es también periódica con período $k\left(\frac{T_p}{k}\right) = T_p$ con $k \in \mathbb{Z}$ entonces todas las señales $s_k(t)$ tienen como período común T_p.

Se puede afirmar que las funciones exponenciales complejas armónicamente relacionadas $s_k(t) = e^{j\omega_0 kt}$ son otrogonales.

De esta forma es posible aproximar cualquier función periódica $x(t) = x\left(t + kT_p\right)$con la serie $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\omega_0 kt}$ (**) conocida como la serie de Fourier de $x(t)$, con $c_k = \frac{1}{T_p}\int_{t_0}^{t_0+T_p} e^{-j\omega_0 kt}\, x(t)dt$ (***)

donde t_0 puede elegirse de forma arbitraria (usualmente se toma $t_0 = 0$ o $t_0 = -\frac{T_p}{2}$. A (**) se le denomina ecuación de síntesis y a (***) ecuación de análisis.

En la mayoría de las aplicaciones se utilizarán funciones $x(t)$ de valor real. Para este caso especial, puesto que $x^*a = (xa)^*$ cuando $x \in \mathbb{C}$ y $a \in \mathbb{R}$, y $x^* + y^* = (x + y)^*$, entonces se cumple para los coeficientes de la serie con $k \in \mathbb{N}^+$ que

$$c_{-k} = (\frac{1}{T_p}\int_{t_0}^{t_0+T_p} e^{-j\omega_0 kt}\, x(t)dt)^* = c_k^*$$

A esta relación, que también puede escribirse como $c_{-k}^* = c_k$se le conoce como simetría conjugada o simetría hermítica de los coeficientes de Fourier para funciones reales. Nótese que esto implica que la magnitud de c_k y c_{-k} son iguales, y que el ángulo de c_k es igual al inverso aditivo del ángulo de c_{-k}. Además, utilizando el hecho de que $z + z^* = 2Re\{z\}$ se puede reescribir (**), asumiendo que $c_k = \left|e^{j\theta_k}\right|$, con $\theta_k = \measuredangle\, c_k$ como:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\omega_0 kt} = \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k e^{j\omega_0 kt} + c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{j\omega_0 kt}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} e^{-j\omega_0 kt} + c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{j\omega_0 kt} = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} ((c_k e^{j\omega_0 kt})^* + c_k e^{j\omega_0 kt})$$

$$= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2Re\left\{c_k e^{j\omega_0 kt}\right\} = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2|c_k| Re\left\{e^{j(\omega_0 kt + \theta_k)}\right\}$$

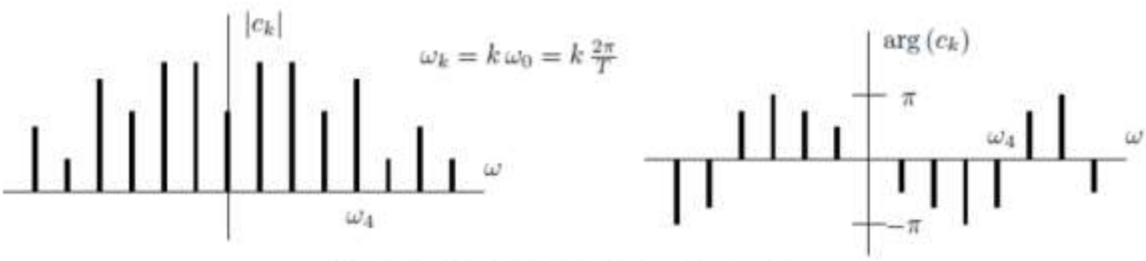
$= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2|c_k| \cos(\omega_0 kt + \theta_k) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{c_k} \cos(\omega_0 kt + \theta_k)$ (****)

con $\widehat{c_k} = 2|c_k|$ que tienen todos valores reales, incluso c_0, puesto que siguiendo $s_0 = e^{j\omega_0 0t} = 1$ entonces: $c_0 = \frac{1}{T_p}\int_{t_0}^{t_0+T_p} x(t)\, dt$, que adquiere siempre un valor real, y equivale al valor medio de la función $x(t)$ en un periodo T_p. Por convención (****) se escribe con frecuencia como $\sum_{k=0}^{\infty} \widehat{c_k} \cos(\omega_0 kt + \theta_k)$,donde $\widehat{c_k}$ es entonces$|c_0|$ y θ_0 es cero si $c_0 \geq 0$ o π si $c_0 < 0$.

Resumiendo, la función real $x(t)$ puede representarse como una suma infinita de señales cosenoidales de frecuencias múltiplos de una frecuencia fundamental ω_0, desfasadas por valores θ_k. Se dice entonces que $x(t)$tiene componentes de frecuencia $k\omega_0$ de magnitud $\widehat{c_k}$ y fase θ_k. (Alvarado, 2010).

Espectro de una función

Mediante el desarrollo en serie de Fourier de una función periódica de período T, se obtiene una descomposición de la función como suma de funciones sinusoidales o de exponenciales complejas de diferentes frecuencias. Todas las frecuencias (en radianes) $\omega_k = k\frac{2\pi}{T}$ son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ y se denominan armónicos. También se puede decir que al desarrollar en serie de Fourier se analiza la función para determinar las componentes, a_k y b_k o bien c_k, de cada una de estas frecuencias, mientras que al sumar la serie de Fourier se sintetiza la función a partir de sus armónicos. El conjunto de todos estos valores (frecuencias y coeficientes) forman el espectro de la función f. Para “visualizar” el espectro, en el caso de la serie de Fourier compleja, se puede representar por separado los módulos o amplitudes $|c_k|$ y los argumentos o fases $\arg(c_k)$ para las diferentes frecuencias ω_k, como se hace en la figura. Se obtienen así (las gráficas de) los llamados espectro de amplitud y espectro de fase. (Antonio Vallejo, 2010).



Espectro de amplitud y espectro de fase

Nótese que como (para una función f real, como se ha supuesto hasta ahora)

$c_{-k} = \overline{c_k} \Rightarrow |c_{-k}| = |\overline{c_k}|, \arg(c_{-k}) = -\arg(c_k)$las gráficas tienen las simetrías indicadas: par para el espectro de amplitud e impar para el de fase. A partir de la serie de Fourier trigonométrica es usual convertir cada sumando$a_k \cos\omega_k t + b_k \sin\omega_k t$ a la forma módulo-fase $A_k \cos(\omega_k t + \theta_k)$, pues con:

$a_k = A_k \cos\theta_k$; $b_k = -A_k \sin\theta_k$; $A_n = \sqrt{{a_n}^2 + {b_n}^2}$; $\tan\ \theta_k = -\frac{b_k}{a_k}$se obtiene:$A_k \cos(\omega_k t + \theta_k) = A_k(\cos\omega_k t \cos\theta_k - \sin\omega_k t \sin\theta_k) = a_k \cos\omega_k t + b_k \sin\omega_k t$

Transformada de Fourier

Las series de Fourier permiten describir señales periódicas como una combinación de señales armónicas (sinusoides). Con esta herramienta, podemos analizar una señal periódica en términos de su contenido frecuencial o espectro. Además, se permite establecer la dualidad entre tiempo y frecuencia, de forma que operaciones realizadas en el dominio del tiempo tienen su dual en el dominio frecuencial. Utilizando operaciones sobre vectores, se pueden calcular fácilmente los coeficientes de Fourier correspondientes a una señal. (Alvarado, 2010)

La transformada de Fourier es la transformación más común de una señal dependiente del tiempo para ser estudiada en el dominio de las frecuencias, debido a que las bases de transformación son funciones senos y cosenos, que caracterizan a la señal en el dominio de la frecuencia. (Gomis, 2009)

La transformada de Fourier es el procedimiento matemático que descompone una función en las frecuencias que le forman de la misma manera que un prisma descompone la luz en los diferentes colores y longitudes de onda. Es de destacar que el uso de esta transformada implica la solución de integrales que hacen el análisis continuo para todo tiempo. En la práctica, no siempre es posible por el consumo de tiempo o el desconocimiento de la función original, puesto que solo se poseen datos discretos resultantes de una captura. En las aplicaciones de ingeniería y tratamiento de señales, resulta más útil considerar el proceso de manera discreta y no continua, ya que los sistemas de adquisición de datos no pueden obtener ni analizar la totalidad de la información.

Transformada Discreta de Fourier

En matemáticas, la transformada Discreta de Fourier, designada con frecuencia por la abreviatura DFT (del inglés Discrete Fourier Transform). La DFT permite evaluar la transformada de Fourier de secuencias de duración finita por lo que en ocasiones se denomina transformada de Fourier finita, es una operación ampliamente empleada en tratamiento de señales y en campos afines para analizar las frecuencias presentes en una señal muestreada, resolver ecuaciones diferenciales parciales y realizar otras operaciones, como convoluciones y correlaciones. La DTF es una secuencia compleja que es obtenida por medio de muestrear un período de la transformada de Fourier de la señal a un número finito de puntos de frecuencia, es decir, que corresponde a muestras igualmente espaciadas en frecuencia de la transformada de Fourier de la señal discreta. La DFT es importante, entre otras, por dos razones. Primero, permite determinar el contenido frecuencial de la señal de voz, o sea, realizar análisis espectral. La segunda razón de importancia es realizar operaciones de filtrado en el dominio de la frecuencia. La eficiencia es la razón principal por la cual se procesan las señales en el dominio de la frecuencia. (Velásquez, 2008).

Para calcular la Transformada Discreta de Fourier se considera ahora la secuencia de N números complejos $X = x_0, x_1, \dots, x_{N-1}$, los cuales son muestras de una señal analógica. Tal secuencia debe transformarse en la secuencia de N números complejos $F = f_0, f_1, \dots, f_{N-1}$, las cuales son muestras del espectro de la señal analógica, según la fórmula: $f_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$ con $k = 0, \dots, N-1$

Siendo: e la base de los logaritmos naturales; j la unidad imaginaria $(j^2 = -1)$; N es el número de muestras; $f_k \in F$

La transformada de Fourier discreta inversa (por sus siglas en inglés IDFT, Inverse Discrete Fourier Transform) se calcula, por otra parte, mediante:

$x_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$; con $n = 0, \dots, N-1$

Tal que: $x_n \in X$; N el número de muestras.

El cálculo de la DFT requiere la suma compleja de N multiplicaciones complejas para cada una de las salidas. En total, N^2 multiplicaciones complejas y N(N-1) sumas complejas para realizar un DFT de N puntos.

Es de notar que el número de operaciones efectuadas por la DFT puede resultar altamente demandante en tiempo y recursos del sistema, por lo que se hace necesaria la implementación de un algoritmo recursivo que disminuya de manera exponencial el número de operaciones efectuadas por la DFT.

La Transformada Rápida de Fourier FFT

La evaluación directa de la DFT requiere (n^2) operaciones aritméticas. Mediante un algoritmo FFT se puede obtener el mismo resultado con solo (n log n) operaciones. La FFT es el algoritmo que se utiliza para realizar la DFT de una forma eficiente y rápida. Lo que se consigue con este algoritmo es simplificar enormemente el cálculo de la DFT introduciendo "atajos" matemáticos para reducir drásticamente el número de operaciones. La idea que permite esta optimización es la descomposición de la transformada a tratar en otras más simples y así sucesivamente hasta llegar a transformadas de 2 elementos donde k puede tomar los valores 0 y 1. Una vez resueltas las transformadas más simples se agrupan en otras de nivel superior que deben resolverse de nuevo y así sucesivamente hasta llegar al nivel más alto. Al final de este proceso se ordenan los resultados obtenidos. Dado que la transformada discreta de Fourier inversa es análoga a la transformada discreta de Fourier, con distinto signo en el exponente y un factor 1/n, cualquier algoritmo FFT se puede adaptar fácilmente para el cálculo de la transformada inversa. En la Figura se observa un ejemplo de aplicación de este algoritmo. (Worner, 2010)

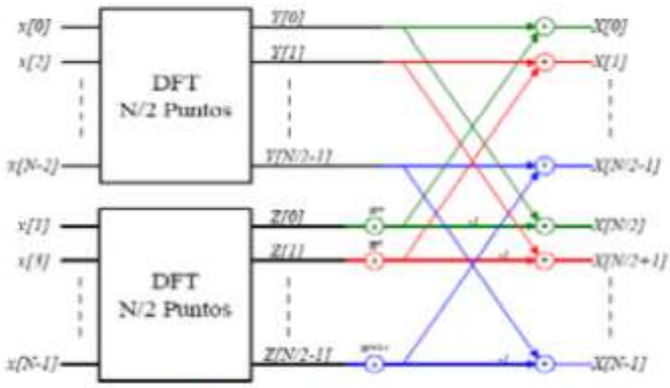


Figura Diagrama Mariposa del Algoritmo de 4 puntos

Transformada rápida de Fourier con MATLAB

Matlab, dentro de su toolbox de signal processing, posee la FFT de manera apropiada y recurrente.

En MatLab existe el comando fft que calcula la transformada discreta de Fourier eficientemente, es decir no es más que un algoritmo de la transformada rápida de Fourier (Fast Fourier Transform); aunque al principio aparece solo una f, según uno de los fundadores del MATLAB, Cleve Moler esta f está tanto por fast como por finite. Para usar este comando solo es necesario pasarle como argumento el vector de las muestras de la función correspondiente $f = (f_0, f_1, \dots, f_{N-1}) \in C^N$, dichos valores son muestreados en un intervalo de tiempo $t = (0: N-1) * \frac{T_s}{N}$, donde T_s es el tiempo final. Muchas veces se toma como paso para la discretización temporal el parámetro conocido como tasa de muestreo F_s (muestras por unidad de tiempo); $F_s = \frac{1}{\Delta t}$. (Cooley, 1993). En el caso de que la fft sea usada para determinar los coeficientes del polinomio trigonométrico que aproxima una función dada, entonces el arreglo de valores que se pasa se supone dado en el intervalo del período principal de la función [0; T] y los puntos muestrales se toman de la forma $t = (0{:}N - 1) * \frac{T}{N}$ siendo T el período y N el tamaño de la muestra. Se observa que no se tiene en cuenta el valor de la función en el último punto, debido a que ya se supone que es igual al primero.

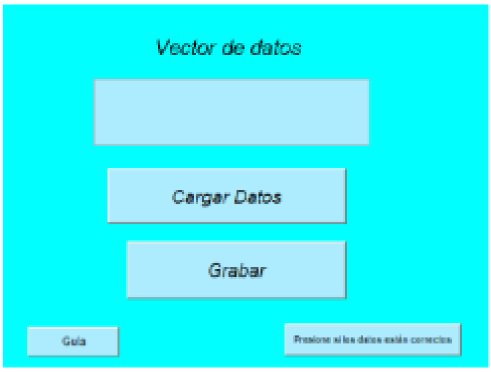
Propuesta de solución e Interfaz Gráfica

Todos los métodos y funciones que se usarán para darle solución al problema han sido implementado en MATLAB y los respectivos archivos .m . A continuación, se dará una breve descripción del funcionamiento de cada uno de ellos:

proyecto.m: Aparece el Menú Principal de la aplicación, dentro del cual se encuentran los botones: Datos, en el cual se puede introducir el vector de datos o cargar los datos de un archivo .wav; aparece el botón Procesamiento, el cual va a procesar los datos; además el botón de Graficar y el de Salir del programa. También está el botón Guía que permite acceder y tener información de cómo trabajar con el programa, es una guía al usuario.

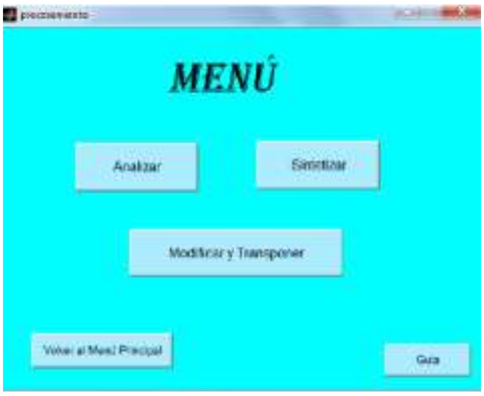
selecciondatos.m: Se muestran las opciones de entrada de datos para que el usuario elija la que desee.

datos.m: Se muestran dos botones y un texto editable, en cuyo texto el usuario puede introducir los datos para trabajar, uno de los botones es el de Cargar Datos, en el cual el usuario puede importar los datos de un archivo .wav; además el usuario tiene la opción de grabar un sonido para trabajar con dicha grabación y el botón de guía al usuario. Aparece otro botón es para confirmar que los datos introducidos son los que se desea.



confuncion.m: Cuando el usuario escoge la opción de introducir la función, se encuentra en esta ventana en la cual puede introducir la función, en la que la incógnita es la variable t y se introduce como mismo los comandos de MATLAB o sea log(t), exp(t), t^2, t*9, etc. También se encuentra para introducir el intervalo de tiempo en el cual el usuario desea trabajar con un inicio y un fin, así como la cantidad de puntos que desea en dicho intervalo. Además, el intervalo tiene que ser en segundos.

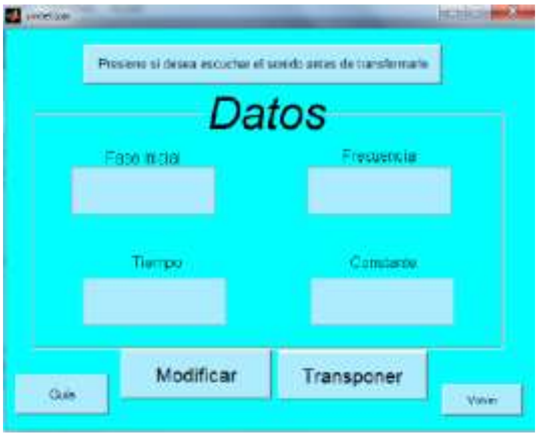
procesamiento.m: En esta ventana aparecen varios botones, el de Analizar, Sintetizar, Modificar y Transponer, el botón de Guía al usuario, y el último que espara retornar al Menú Principal.

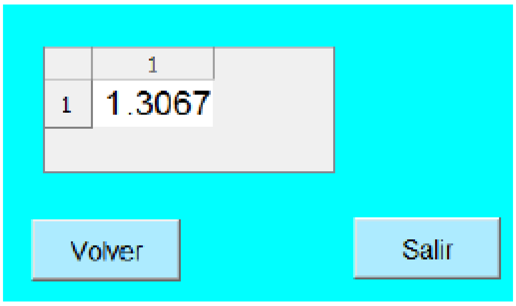


analizar.m: Aquí encontramos la solución de Analizar los datos, donde se calcula la fft, además aparecen tres botones uno para retornar al Menú de la ventana de procesamiento, otro para reproducir el sonido después de calculada la fft con una frecuencia 44100 Hz y otro para salir de la aplicación.

sinte.m: Aquí se encuentra la solución de Analizar los datos, donde se calcula la fft, además aparecen tres botones uno para retornar al Menú de la ventana de procesamiento, otro para reproducir el sonido después de calculada la ifft con una frecuencia 44100 Hz y otro para salir de la aplicación.

sintetizar.m:En esta ventana se introducen los datos para modificar y transponer: la fase inicial, la frecuencia, el tiempo y una constante. Además aparecen botones, el de volver a la ventana de procesamiento, el de reproducir el sonido previamente introducido, el de guía al usuario y el de mostrar el resultado de modificar, si se accede al botón de transponer, se vuelve a pedir al usuario que introduzca de la forma que desee el vector de datos b_k .

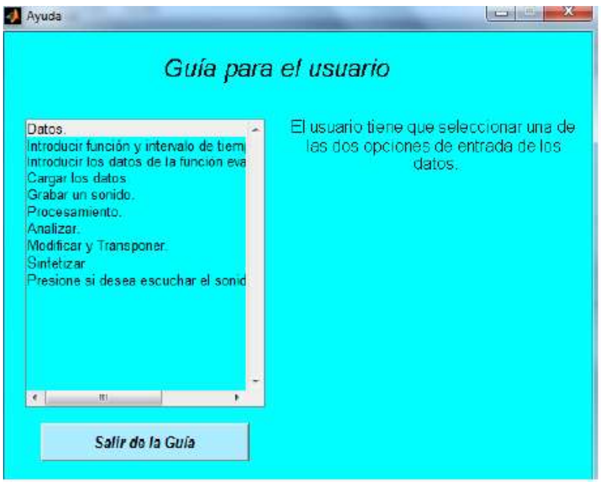


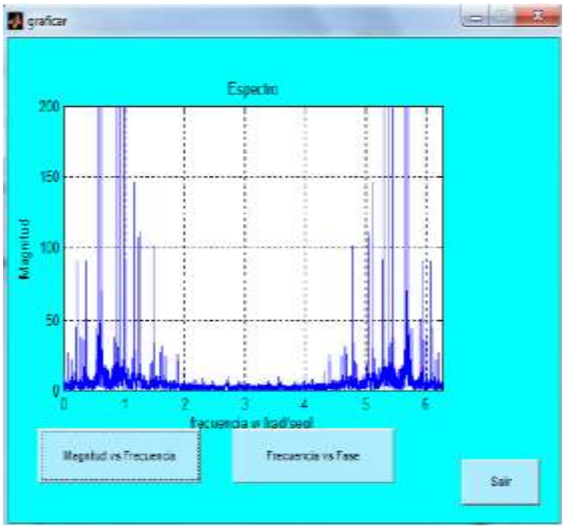


solucionsintetizar.m: Se muestra la solución de modificar, además aparecen dos botones; uno para volver a la ventana llamada sintetizar y otro para salir del programa.

soluciontransponer.m: Se muestra la solución de transponer, además aparecen dos botones; uno para volver a la ventana llamada sintetizar y otro para salir del programa.

Ayuda.m: En esta ventana el usuario puede ver todas la especificaciones para trabajar con el programa.





graficar.m: Se muestran tres botones, uno para salir del programa y otros dos para graficar de dos formas distintas los datos introducidos por el usuario.

CONCLUSIONES

En este trabajo se abordó el tema de la Transformada Discreta de Fourier, así como el uso eficaz de la versión computacional con menor costo de dicha transformada, la Transformada Rápida de Fourier. Se profundizó en el uso de MATLAB en el procesamiento de señales y de funciones que MATLAB trae en sus librerías y funciones como la fft. En este trabajo se implementaron funciones para facilitar el tratamiento de dichas señales, a través de datos introducidos por el usuario. Se implementó una interfaz gráfica de uso fácil donde puede resolverse el problema planteado. Se profundizó en algoritmos más eficientes y menos costosos computacionalmente para resolver este tipo de problemas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alvarado, P. (2010). *Señales y Sistemas Fundamentos Matemáticos.* Costa Rica: Centro de Desarrollo de Material Bibliográfico.

Antonio Vallejo, J. (2010). *Análisis de Fourier.* Mexico: Facultad de Ciencias.

Arteaga Bastidas, R. H. (2010). *Reflexiones sobre la aplicación de la transformada de Fourier.* La Habana: Pueblo y Educación.

Colemar, A. (2010). *El sonido digital: formatos, captura, edición, manipulación, conversión y grabación.* Madrid: Prentice Hall.

Cooley, J. a. (1993). *An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series.* New York: Springer.

Crespo, J. (2009). *Guía esencial MP3.* Madrid: Prentice Hall.

Gomis, P. (2009). *Estimación espectral de señales biomédicas. Métodos clásicos (fft) y paramétricos: Aplicaciones prácticas con MATLAB.* Barcelona: Sexto Piso.

Jiménez, C. O. (2013). *"Procesamiento digital de señales sísmicas en entorno MATLAB".* Peru: Instituto Geofísico del Perú.

Velásquez, G. (2008). *Sistema de reconocimiento de voz en MATLAB.* Ciudad de Guatemala: Santillana.

Worner, S. (2010). *"Fast Fourier Transform".* Zurich: BRO AG.

MODALIDAD DE EDUCACIÓN A DISTANCIA EN LA EDUCACIÓN SUPERIOR EN LA MATEMÁTICA SUPERIOR

Autores: María Julia Quíntela Chávez[10], Lourdes Tarifa Lozano[11], María de L. Artola Pimentel[12] y Leyda Finalé de la Cruz[13]

RESUMEN

[10] Doctorando en Ciencias de la Educación. Profesor Auxiliar de la *Universidad de Matanzas, maria.quintela@umcc.cu.*. https://orcid.org/0000-0002-6456-509X

[11] Doctor en Ciencias Pedagógicas. Profesora de la Dirección de Calidad. Universidad de Matanzas, Cuba, Profesor Titular. https://orcid.org/0000 0002 9888 3803. E-mail: lourdes.tarifa@umcc.cu

[12] Doctor en Ciencias Técnicas. Asesora del Rector de la Universidad de Matanzas. Cuba. Profesor Titular. https://orcid.org/0000-0001-9070-7381. E mail: lourdes.artola@umcc.cu

[13] Doctor en Ciencias de la Educación. Rector de la Universidad de Matanzas. Cuba. . E mail. rector@umcc.cu. Profesor Titular.. https://orcid.org/0000-0002-8704-7615. E mail. rector@umcc.cu