

MINISTERIO DE EDUCACIÓN SUPERIOR. 2018. *Resolución 02.18. Reglamento del Trabajo Docente Metodológico*. La Habana, Cuba.

Soler M. M. 2012. *La interdisciplinariedad en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática: una alternativa didáctica para la formación de profesores de matemática*.

Tesis en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. Universidad de Ciencias Pedagógicas Enrique José Varona,

Soler M. M. M. et al. 2016. *Programa de Matemática Básica*. Universidad de Matanzas.

LOS ELEMENTOS HEURÍSTICOS EN LA CLASE DE MATEMÁTICA SUPERIOR

Autores: Marilú Jorge Martín.¹⁷, Alfredo Fundora Rolo.¹⁸

RESUMEN

En la actualidad, se reconoce a la instrucción heurística como una de las más importantes tendencias relacionadas con el desarrollo del pensamiento. En esta comunicación se muestra de forma breve cómo podemos utilizar la Heurística como método para la enseñanza de los procedimientos lógicos del pensamiento, en particular, mostramos el uso de los elementos heurísticos en las clases de la Matemática Superior de la carrera de Economía. Las consideraciones realizadas en este trabajo y los ejemplos mostrados, contribuyen a una mejor orientación hacia la enseñanza heurística y su efecto en el aprendizaje de los estudiantes.

Palabras clave: elementos heurísticos, matemática, enseñanza, aprendizaje

ABSTRACT

Currently, heuristic instruction is recognized as one of the most important trends related to the development of thought. This communication briefly shows how we can use Heuristics as a method for teaching logical procedures of thought, in particular, we show the use of heuristics in Higher Mathematics classes in the Economics career. The considerations made in this work and the examples shown contribute to a better orientation towards heuristic teaching and its effect on student learning.

Keywords: heuristics, mathematics, teaching, learning

RÉSUMÉ

Actuellement, l'enseignement heuristique est reconnu comme l'une des tendances les plus importantes liées au développement de la pensée. Cette communication montre brièvement comment nous pouvons utiliser l'heuristique comme méthode d'enseignement des

¹⁷ Profesora Auxiliar del Departamento de Matemática de la Universidad de Matanzas. Máster en Matemática Educativa. marilu.jorge@umcc.cu <https://orcid.org/0000-0001-6860-6277>

¹⁸ Profesor Asistente del Departamento de Matemática de la Universidad de Matanzas. Máster en Matemática Numérica. Universidad de Matanzas. alfredo.fundora@umcc.cu <https://orcid.org/0000-0001-8744-0604>

procédures logiques de la pensée, en particulier, nous montrons l'utilisation de l'heuristique dans les classes de mathématiques supérieures dans la carrière d'économie. Les considérations faites dans ce travail et les exemples présentés contribuent à une meilleure orientation vers l'enseignement heuristique et son effet sur l'apprentissage des élèves.

Mots-clés: heuristique, mathématiques, enseignement, apprentissage

INTRODUCCIÓN

La preocupación por el desarrollo del pensamiento de los estudiantes desde los primeros grados tiene dimensiones y raíces históricas que hoy se hacen más profundas. De ahí que, enseñar a pensar sea uno de los principales objetivos de la enseñanza superior en Cuba.

La enseñanza de la Matemática se perfecciona cada vez más en Cuba y muchos son los profesores que desarrollan sus clases siguiendo el método heurístico, que bien pudiera caracterizarse como el método mediante el cual la actividad del profesor consiste en conducir al alumno a hallar por sí mismo el conocimiento que se desea que adquiera; el papel del maestro en este método es estimular al alumno al pensamiento reflexivo, guiarlo para que indague e investigue, para que llegue a conclusiones. (Torres, P., 1986, p. 114)

Así, la Matemática, contribuye a la formación y desarrollo del pensamiento lógico en los estudiantes. De ahí que en la enseñanza superior se trabaje en el desarrollo del pensamiento lógico y la resolución de problemas en vinculación con la práctica, de forma tal que les permita, no solo poder enfrentarse a la solución de problemas matemáticos, sino también, la de pensar de forma correcta ante la solución de los problemas concernientes a las ciencias económicas que en la vida cotidiana enfrentan.

En la actualidad, se reconoce a la instrucción heurística como una de las más importantes tendencias relacionadas con el desarrollo del pensamiento. El objetivo del trabajo es mostrar de manera breve cómo los profesores podemos utilizar la Heurística como método para la enseñanza de los procedimientos lógicos del pensamiento. En particular, se presentan algunos ejemplos de la utilización de los elementos heurísticos en las clases de la asignatura Matemática Superior en la carrera de Economía.

DESARROLLO

Los métodos heurísticos en la enseñanza están orientados a entrenar al estudiante en vías para la resolución independiente de problemas en forma planificada, con una racionalización del esfuerzo mental y práctico; adiestrarlo para resolver por sí mismo otros problemas que le plantee la práctica laboral o social.

Los autores estudiados clasifican los elementos heurísticos en dos categorías: procedimientos heurísticos y medios auxiliares heurísticos. Los procedimientos heurísticos son formas de trabajo y de pensamientos que apoyan la realización consciente de actividades mentales exigentes. (Müller, H., 2015)

La introducción de estos procedimientos en la clase y su aplicación por parte de los estudiantes propicia la asimilación de los conocimientos, su capacidad para resolver problemas para los cuales no existen procedimientos algorítmicos y el desarrollo del pensamiento creador.

Los procedimientos heurísticos pueden dividirse en:

- principios heurísticos
- reglas heurísticas
- estrategias heurísticas

Los principios heurísticos: Son de gran utilidad para la búsqueda de nuevos conocimientos y para su fundamentación, también sugieren ideas para la solución de diferentes problemas.

Los más utilizados son:

- La analogía.
- Inducción incompleta.
- La generalización.
- Medir y probar.
- Principio de la movilidad.
- Consideración de casos especiales o casos límites.
- Reducción a problemas ya resueltos.

Las reglas heurísticas: Representan impulsos que provoca el profesor en los estudiantes mediante observaciones, preguntas y recomendaciones, que ayudan a estos a orientarse en la búsqueda de la solución del problema.

Las estrategias heurísticas: Son los sentidos de orientación que pueden seguirse en el razonamiento para conectar los datos con la solución durante el proceso de resolución de un problema.

Las más usadas son:

- El trabajo hacia adelante o método sintético.
- El trabajo hacia atrás o método analítico.

Los medios auxiliares heurísticos son recursos que apoyan el análisis, la reflexión y el razonamiento en la realización de actividades mentales exigentes, o sea, ayudan a hacer más racional el trabajo mental. (Almeida, B., 1998)

Entre los más importantes se encuentran:

- Las figuras auxiliares ilustrativas o de análisis.
- Las tablas para reflejar relaciones entre datos.
- Gráficos.
- Resúmenes de definiciones, teoremas, propiedades y procedimientos.

Los principios heurísticos

A continuación presentamos algunos ejemplos de cómo podemos aplicar los principios heurísticos en las clases de Matemática Superior de la carrera de Economía.

Principio de medir y probar sistemáticamente: Consiste en realizar mediciones en casos particulares para obtener una suposición general. Aparece muy frecuentemente asociado al principio de movilidad. O sea, se mide y prueba, o se mide y compara, después de haber ejecutado variaciones mediante la movilidad.

Ejemplo: En el tema de aplicaciones de la derivada de funciones de una variable real, en la clase donde se introducen los problemas de optimización, un ejercicio de motivación puede ser proponerle a varios estudiantes del grupo tomar una cinta de 60 cm y plantear a cada uno la siguiente situación:

- a) Formar un rectángulo con la cinta.
- b) Calcular el área de la superficie plana que limita dicha cinta.
- c) Llevar a la próxima clase el resultado obtenido por cada uno.

Después de exponer el resultado obtenido por cada estudiante, el profesor destaca que las longitudes de los lados del rectángulo formado por cada uno de los estudiantes son diferentes, y por ende las áreas no son iguales. En ese momento, la pregunta que el profesor realizaría al grupo es: ¿qué longitud deberán tener los lados del rectángulo de perímetro 60 cm, que proporcionan el área máxima? Con las mediciones realizadas los estudiantes pueden comprobar por sí mismos cuáles son las longitudes que deben tener los lados del rectángulo para que el área del mismo sea máxima.

Principio de analogía: Se basa en el establecimiento de semejanzas en el contenido o en la forma entre diferentes objetos o situaciones. Este principio ayuda a mostrar el camino a seguir para encontrar la solución de un ejercicio.

La analogía es una especie de semejanza, dos sistemas son análogos si concuerdan en relaciones claramente definibles de sus partes respectivas. (Polya, G., 1966)

Ejemplo: Como se trata de establecer semejanzas en el contenido o en la forma entre diferentes situaciones, podemos introducir el cálculo del excedente del consumidor como el cálculo del área de la región comprendida entre la función de demanda inversa y la recta $p=p_e$, donde p_e es la ordenada del punto de equilibrio de mercado y q_e la abscisa del mismo punto, entonces:

$$\int_0^{q_e} (p(q) - p_e) dq.$$

En la introducción del concepto el profesor muestra la semejanza del cálculo de áreas con el excedente del consumidor. En este ejemplo se manifiesta también el principio de reducción a problemas ya resueltos. El nuevo problema se reduce a otro ya conocido por el estudiante.

Principio de generalización: A partir del análisis de un objeto o situación en particular, la aplicación de este principio permite obtener suposiciones generales; la validez de las mismas debe ser demostrada.

Ejemplo: En el tema de funciones de varias variables, después de definir función compuesta de varias variables se impone la pregunta: ¿se podrá aplicar la regla de la cadena de funciones compuestas ya conocida en el Cálculo Diferencial de Funciones de una variable? La respuesta es afirmativa. A través de un ejemplo podemos generalizar la regla de la cadena auxiliándonos de un esquema que relaciona la dependencia entre las variables (el llamado árbol de dependencia). Veamos:

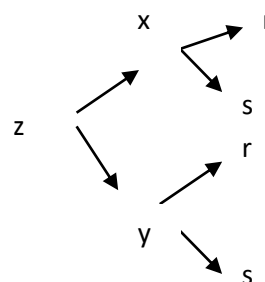
El estudiante sabe que si $y = f(u)$ con $u = g(x)$ esquema : $y \rightarrow u \rightarrow x$

Entonces:
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Luego para las funciones de varias variables:

Si $z = f(x, y)$ con $x = g(r, s)$
 $y = h(r, s)$

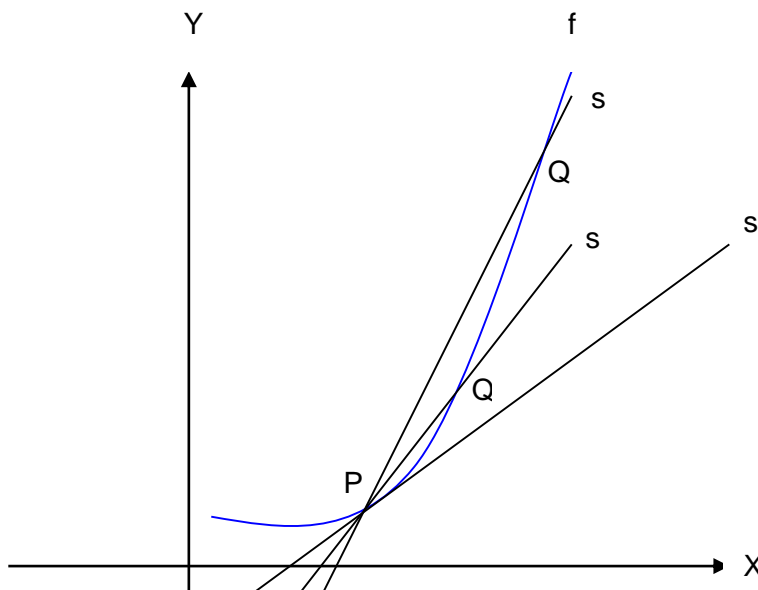
Se cumple:
$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r}$$



Principio de la movilidad: Este principio se fundamenta en suponer que un elemento dado puede moverse a diferentes posiciones, para analizar los resultados que se producen durante ese movimiento.

En la asignatura Matemática Superior para Ciencias Económicas, empleamos la resolución de problemas en el tratamiento de los nuevos contenidos a partir del planteamiento y solución de problemas prácticos. Esta tendencia no es la más común para el estudiante que egresa de la escuela media, pero considero que es muy motivadora en este nivel de enseñanza.

Ejemplo: Al introducir el concepto de derivada de una función de una variable real en un punto, planteamos el problema de la determinación de la recta tangente a una curva de ecuación $y = f(x)$ en el punto $P(a; f(a))$ de esta.



Hasta este momento el estudiante sabe determinar la ecuación de una recta dados dos pares ordenados o la pendiente y un par ordenado. La dificultad radica en encontrar dicha ecuación conocido solo un punto de la función. Le expresamos al estudiante la necesidad de otro par ordenado para recurrir a un problema ya conocido como es el de encontrar la pendiente de una recta dados dos puntos y podemos calcular una aproximación para dicha pendiente si elegimos un punto cercano $Q(x, f(x))$ de la curva y calculamos la pendiente de la recta secante PQ . Para ello elegimos $x \neq a$, de modo que $Q \neq P$. Sea s la recta secante a la curva f , que pasa por los puntos P y Q de f . Al aproximar el punto Q al punto P manteniendo el primero sobre la curva f , la recta secante irá variando su posición y de este modo, si al

hacer “tender” el punto Q hacia el punto P la recta secante “tiende” hacia la posición de cierta recta dada, esta última recibe el nombre de recta tangente en P a la curva f.

Continuamos el procedimiento estimulando la búsqueda de la pendiente de la recta mediante indicaciones y preguntas (impulsos) hasta llegar al límite de las pendientes de las rectas secantes como la pendiente de la recta tangente que se busca al inicio del problema.

En este ejemplo podemos apreciar como es frecuente que los principios heurísticos aparezcan interrelacionados, aunque alguno de ellos predomine en un momento dado. En particular se revelan aquí el de movilidad y reducción a problemas ya resueltos.

Principio de consideración de casos especiales o casos límites: En este principio de consideración de casos especiales y casos límites, dentro de un conjunto de casos posibles, se elige uno, que como consecuencia de sus características particulares, provoca a su vez resultados especiales.

Ejemplo: Una de las reglas de derivación, plantea que si f y g son funciones derivables en x, entonces $(f(x).g(x))' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$. En la clase donde se introduce este contenido, una vez que el estudiante conoce la regla, se le puede preguntar: ¿qué resultado se obtendrá si $f(x)=c$ donde c es una constante? Indudablemente llega a: $(c.g(x))' = c.g'(x)$. Este se considera un caso especial dentro de las reglas de derivación.

Principio de reducción: Una de las interpretaciones de este principio es la reducción a problemas ya resueltos, el cual consiste en realizar alguna variación en el problema por resolver que permite transformarlo en otro ya conocido.

Ejemplo: Sean las funciones de oferta y demanda de un artículo las siguientes:

$p(x) = 3 - x$, $p(x) = x^2 + 1$, donde p es el precio en pesos y x son las unidades producidas. Determina gráfica y analíticamente el punto de equilibrio de mercado e interpreta el resultado.

En el estudio de la Matemática Superior para las Ciencias Económicas, se plantea que en un mercado de competencia perfecta se produce un equilibrio de mercado cuando la cantidad demandada por el consumidor se iguala a la cantidad ofertada por el productor. El punto donde esto ocurre recibe el nombre de punto de equilibrio. Dada la cantidad demandada y la ofertada se pide al estudiante encontrar el punto donde se produce dicho equilibrio.

Como estas cantidades se expresan a través de funciones (en este curso de Matemática Superior fundamentalmente funciones lineales y cuadráticas), entonces el punto de equilibrio buscado no es más que el punto de intersección entre las dos funciones, el cual es

un problema bien conocido por los estudiantes de la enseñanza media. Luego entonces este problema se reduce a la búsqueda del punto de intersección de las dos funciones dadas, tanto analítica como gráficamente. La interpretación del resultado, se reduce a la interpretación del concepto de función, también conocido por el estudiante.

Los medios auxiliares heurísticos

A continuación mostramos algunos ejemplos de cómo es posible utilizar los medios auxiliares heurísticos en las clases de Matemática Superior.

Las figuras ilustrativas o de análisis se utilizan en problemas matemáticos de índole geométricos y no geométricos. Constituyen medios auxiliares que ayudan a hacer un análisis de la situación, permitiendo establecer relaciones y dependencias que nos acercan a la solución del problema trazado, a partir de la información que portan consigo.

Un ejemplo donde podemos utilizar las figuras de análisis pueden ser los problemas de optimización relacionados con cuerpos geométricos, aquí resulta muy útil la representación de dicho cuerpo; el cálculo de derivadas parciales de funciones de varias variables cuando nos auxiliamos del árbol de dependencia; entre otros.

Las tablas juegan un importante papel como medio auxiliar heurístico, en particular, son imprescindibles en el cálculo. Las mismas casi siempre aparecen al final de los libros de texto de Matemática. Las más utilizadas en la educación superior son: tabla de funciones trigonométricas, tabla de funciones exponenciales, tabla de logaritmos naturales y en un lugar especial las tablas de integrales.

En particular, las tablas de integrales juegan un importante papel como medio auxiliar de cálculo en el tema de la integración. Después de conocer las integrales inmediatas y los métodos de integración, el estudiante se familiariza con estas tablas, que además contienen las inmediatas. Se familiarizan con las integrales que aparecen allí, las notaciones usadas en ellas y también cómo se puede trabajar con las mismas.

Ejemplo: Se desea calcular la integral $\int \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx$

El estudiante identifica que esta integral no aparece en la tabla, y por tanto aplicará el método de integración por sustitución después de un análisis de la integral dada. De ahí que haga el cambio de variables:

$$u = \sin x \quad \int \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx = \int \frac{du}{1 + u^2} = \arctan u + c = \arctan(\sin x) + c$$
$$du = \cos x dx$$

Este cambio de variables le permite reducir la integral dada a una que aparece en la tabla, es decir $\int \frac{du}{1+u^2}$, y poder llegar entonces a la solución. De ahí la importancia de la familiarización con la tabla, pues de otra manera el estudiante no puede llegar con éxito a la integral buscada.

Resúmenes de definiciones, teoremas, propiedades y procedimientos: Este medio auxiliar heurístico se presenta a través de compendios, mementos, entre otros. En los compendios se representa de forma general y metódicamente ordenado, el contenido esencial de los conocimientos matemáticos tratados en la Asignatura o Disciplina, o sea, definiciones, teoremas, demostraciones importantes, tablas para facilitar el cálculo, gráficos y ejemplos. El compendio contiene un índice alfabético para facilitar rápidamente la búsqueda de un elemento del contenido.

Un ejemplo de compendio de gran utilidad para la enseñanza de la Matemática en la Educación Superior es el “Manual de Matemática para Ingenieros y Estudiantes” /S. Bronshtein, K. Semendiaer Editorial Mir, Moscú, 1977. 4ta edición, 696p. El mismo puede ser utilizado por los estudiantes de las Ciencias Económicas.

Los resúmenes que aparecen al final o al principio de los libros de texto de Matemática, son los llamados mementos; estos contienen de forma organizada las principales definiciones, teoremas, fórmulas y propiedades, que fueron objeto de estudio en grados anteriores y se necesita de su utilización para la adquisición de habilidades en los nuevos contenidos, así como para la resolución de ejercicios.

¿Cómo usar el memento en la Educación Superior?

Ejemplo: En la impartición del tema de funciones y cálculo de límites, al retomar el estudio de las funciones elementales fundamentales, podemos remitir al estudiante al memento del texto “Cálculo con Trascendentes Tempranas” de James Stewart que aparece en la primera página del mismo, para actualizar las operaciones aritméticas, propiedades de las potencias y los radicales, el teorema del binomio, propiedades de los logaritmos, valores de las funciones trigonométricas, ecuación de una recta, entre otros, con el fin de recordar cuestiones conocidas que demandan los nuevos contenidos y estar en condiciones de asimilar el nuevo sistema de conocimientos de la asignatura.

CONCLUSIONES

La instrucción heurística tiene carácter motivador, educativo, creador. Muchas son las razones por las cuales aún debemos continuar investigando sobre la heurística. Los

procedimientos heurísticos pueden ser utilizados en cualquier forma organizativa docente de cualquier asignatura en los diferentes niveles de enseñanza, porque en general ellos están presentes en toda actividad cognitiva en que el hombre tenga que encontrar vías de solución desconocidas, altamente exigentes para el pensamiento.

Los profesores que imparten sus clases aplicando el método heurístico logran en sus estudiantes independencia cognoscitiva, comportamiento como sujetos creativos, audacia, originalidad, así como capacidades para la autoevaluación, espíritu crítico y en general son más activos y persistentes. Las consideraciones realizadas en este trabajo y los ejemplos mostrados, contribuyen a una mejor orientación hacia la enseñanza heurística y su efecto en el aprendizaje.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Almeida, Bernardino. (1998). *Los medios auxiliares heurísticos en la Enseñanza de la Matemática*. Universidad Pedagógica. Matanzas, 1998.
- Álvarez, Marta. y otros. (2014). *El proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática. Documentos metodológicos*. Editorial Pueblo y Educación. La Habana, 2014.
- Müller, H. (2015). *El trabajo heurístico y la ejercitación en la enseñanza de la Matemática en la EGPL*. Santiago de Cuba. (Folleto editado por el ISP “Frank País García”). 2015
- Polya, George. (1966). *Matemática y razonamiento plausible*. Madrid. Edit. Tecnos. S.A., 1966.
- Torres, Paúl. (1986). *El método heurístico en la Enseñanza de la Matemática del nivel medio general*. En: Revista Educación. (La Habana) 16 (60): 114-120, enero-marzo 1986

EL USO DE LA “GAMIFICACIÓN” PARA MOTIVAR EL ESTUDIANTE HACIA LA MATEMÁTICA

Autores: Sivoclania Elisa Do Nascimento Romão¹⁹, Walfredo González Hernández²⁰

RESUMEN

Este artículo tiene como objetivo hacer una revisión teórica de los beneficios del uso de la gamificación y conocer su aplicación en el contexto educativo con intuito de motivar al estudiante y eliminar ciertas creencias sobre las matemáticas y su enseñanza. Primero se hace una revisión teórica sobre las creencias y luego se analiza el tema y los resultados de

¹⁹ Licenciada en Educación. Matemática-Física. Maestrante angolana del programa Matemática Educativa en la Universidad de Matanzas, Cuba. <https://orcid.org/0000-0001-9157-0188>

²⁰ Universidad de Matanzas, Matanzas, Cuba. Licenciado en Matemática y Computación, Máster en Didáctica, mención Didáctica de la Matemática. Doctor en Ciencias Pedagógicas. <https://orcid.org/0000-0003-4028-4266>