

— II —

El Ángulo

2.1 Sistema cartesiano

El método que se empleara, es el conocido como el “sistema cartesiano de coordenadas rectangulares”, qué nos permite la localización de un punto. Sean dos rectas, \overline{OX} y \overline{OY} perpendiculares entre sí, el punto de intersección de dichas rectas recibe el nombre de origen. En la Figura 2.1, trazamos perpendiculares a las rectas \overline{OX} y \overline{OY} desde el punto P_1 , a cada una de las perpendiculares del punto P_1 se le llaman coordenadas del punto P_1 . La perpendicular a \overline{OX} se llama abscisa y la perpendicular a la recta \overline{OY} se llama ordenada; las rectas \overline{OX} y \overline{OY} reciben el nombre de “ejes de coordenadas”.

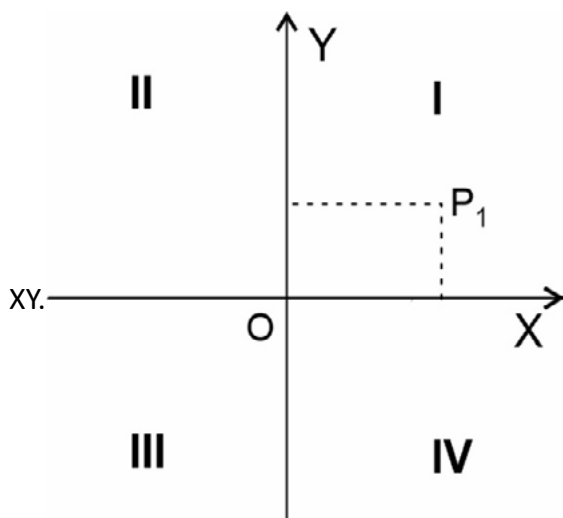


Figura 2.1

Representación de un punto en el plano cartesiano

Cuando el lado inicial coincide con el eje X y el vértice con el origen del plano cartesiano se dice que el ángulo se encuentra en posición canónica, normal o común. El ángulo se genera por la rotación del rayo terminal alrededor de un punto fijo perteneciente a un rayo estacionario, lo podemos designar como una letra minúscula del alfabeto griego, o por medio de tres letras latinas, o por una letra mayúscula del alfabeto A, B, C, etc.

En la Figura 2.2 el lado \overline{OX} es el lado inicial del ángulo A ó $\angle XOP$, el lado OP es el lado terminal y el punto O es el vértice, Como la dirección de rotación es contraria a las manecillas del reloj, el ángulo A ó $\angle XOP$ se considera positivo.

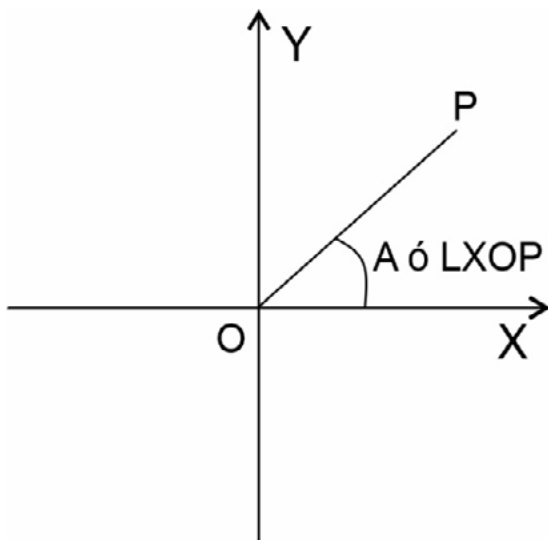


Figura 2.2

Representación del ángulo A ó LXOP.

La abscisa es positiva o negativa según el punto que esté situado a la derecha o a la izquierda del eje Y respectivamente. La ordenada es positiva o negativa según el punto está situado arriba o abajo del eje X respectivamente. En la Figura 2.1, el punto P1 se representa por la abscisa X y la ordenada por Y, que reciben el nombre de coordenadas del punto P1 que comúnmente se escriben como una pareja ordenada de números, es decir (X, Y).

Los ejes de coordenadas dividen al plano en cuatro partes, cada una llamada cuadrante. Por lo general los cuadrantes se enumeran del I al IV en sentido contrario al de las manecillas del reloj, empezando en la parte superior derecha, y se representa por las letras Q1, Q2, Q3 y Q4 respectivamente.

2.2. Ángulo

En trigonometría se considera que el ángulo se genera por la rotación de un rayo alrededor de un punto fijo perteneciente un rayo estacionario. El rayo estacionario se denomina lado inicial del ángulo, el rayo que se desplaza se denomina lado terminal y el punto fijo vértice. Si la dirección de rotación es opuesta al movimiento de las manecillas del reloj cómo se dice que el ángulo es positivo, y si la dirección de rotación es igual al movimiento de las manecillas del reloj, se dice que el ángulo es negativo.

2.3 Medida de ángulos y arcos

Entre los varios sistemas de medidas de ángulos y arcos, usaremos únicamente dos sistemas, los cuales son: el sistema sexagesimal y el sistema circular o radial.

2.3.1 Sistema sexagesimal

En este sistema se considera la circunferencia dividida en 360 partes iguales, cada parte llamada “grado”, el grado se divide en 60 partes iguales llamados “minutos”; y el minuto se divide en 60 partes iguales llamados “segundos”. El sistema sexagesimal es el más utilizado en la ingeniería y en otras aplicaciones prácticas.

2.3.2 Sistema circular

Es también llamado sistema radial y toma como unidad de medida, el arco de circunferencia que subtiende una distancia igual al radio de circunferencia. Al arco unidad se le da el nombre de radián, sabemos que el perímetro de la circunferencia es $2\pi r$; si dividimos por r , obtenemos 2π que será el valor de la circunferencia en radianes.

2.4 Relación entre el sistema sexagesimal y el circular

Utilizaremos la notación que usa la mayoría de los libros, para, grado sexagesimal, N° ; y para radianes N^r . Si llamamos C a la circunferencia: $C=360N^{\circ}=2\pi N^r$. Luego la relación entre el sistema sexagesimal y el circular es: $N^{\circ} / N^r = 360^{\circ} / 2\pi$, entonces

$$N^{\circ} = \frac{180^{\circ}}{\pi} N^r \quad (1)$$

Reordenando, es posible establecer una relación entre el sistema radial y un sistema angular.

$$N^r = \frac{\pi}{180^{\circ}} N^{\circ} \quad (2)$$

Ejemplo: En el Sistema radial, cuanto equivale $45^{\circ}40'30''$?

Como $N^r = \frac{\pi}{180^{\circ}} N^{\circ} = \frac{\pi}{180^{\circ}} [45^{\circ} + (40/60)^{\circ} + ((30/60)60)^{\circ}]$, $N^r = 0,7972 \text{ rad.}$

Entonces, $45^{\circ}40'30'' = 0,7972 \text{ rad.}$

Nota. Observece que los minutos y los segundos son llevados a su equivalencia en grados.

Ejemplo: Cuantos grados sexagesimales equivalen un radian?

$$\text{Como } N^{\circ} = \frac{180^{\circ}}{\pi} N^r = \frac{180^{\circ}}{\pi} 1 = 57,296^{\circ}$$

Entonces, $1 \text{ rad (radian)} = 57,296^{\circ}$ (grados)

2.5 Relación entre Radio, Angulo y Arco

Si dividimos el perimetro C de la circunferencia por el radio, obtenemos:

$$C/R = 2\pi \text{ ó } C/R = 360^{\circ}.$$

Si en lugar de la circunferencia tomamos un arco cualquiera, entonces:

Angulo = Arco/Radio, si estas magnitudes, las designamos con las letras A, S y R para ángulo, arco y radio respectivamente, tenemos que:

$$A = S/R.$$

(3)

$$S = A * R$$

Para A en radianes.

Ejemplo: Cuál es el radio de la curva de una vía, si un automovil que va en la dirección norte queda en dirección noroeste después de recorrer 20 m?

La dirección noreste nos indica un cambio de 45° a partir del norte hacia el este, entonces:

$$A = 45^{\circ} \text{ y } N^r = \frac{\pi}{180^{\circ}} N^{\circ} = \frac{\pi}{180^{\circ}} 45^{\circ} = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

Siendo $S = 20 \text{ m}$, se tiene que:

$$R = \frac{S}{A} = 20 \frac{4}{\pi} = 25,46$$

Entonces, el radio de la curva de vía es de 25,46 m, ver Figura 2.3.

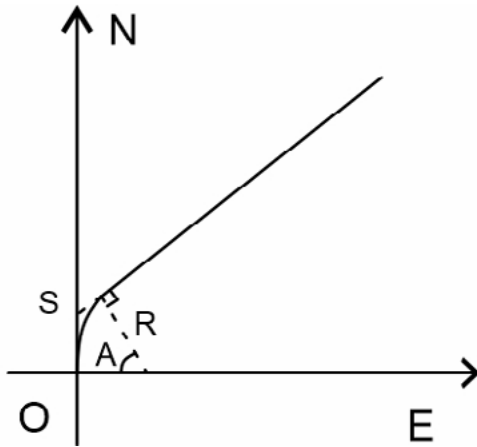


Figura 2.3

Representación del radio de curvatura de una vía.

2.6 Sector Circular

Llámese sector circular al segmento de círculo comprendido entre dos radios y el arco subtendido entre ellos. En la Figura 2.4. tenemos por tanto dos sectores circulares, uno limitado por el arco AMB y otro limitado por el arco ANB. Por geometría sabemos que el área de sector circular es igual al semiproducto del área por el radio. Es decir: $B = \frac{1}{2} S(R)$ y $S = A(R)$ y por lo tanto.

$$B = \frac{1}{2} A(R^2) \quad (4)$$

Donde A está dada en radianes.

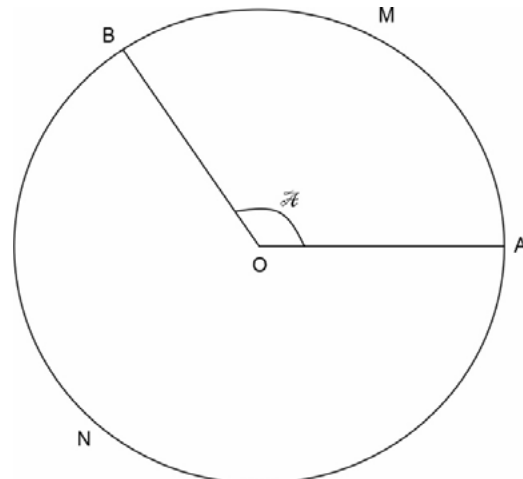


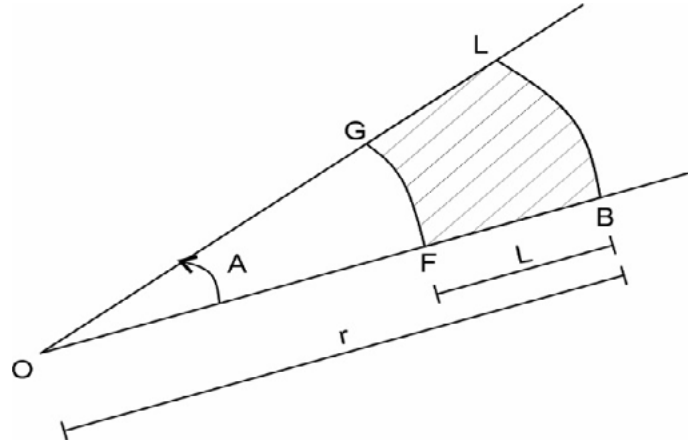
Figura 2.4

Sector circular.

Ejemplo: Hallar el área GLBF, de la Figura 2.5

Figura 2.5

Área de segmento circular.



El área GLEF = área OLB – área OG

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{2}A(r^2) - \frac{1}{2}A(r - L)^2 = \frac{1}{2}Ar^2 - \frac{1}{2}Ar^2 + \frac{1}{2}A2rL - \frac{1}{2}AL^2 \\ &= \frac{1}{2}A2rL - \frac{1}{2}AL^2 \end{aligned}$$

Luego, el área del sector circular GLBF es:

$$\frac{1}{2}AL(2r - L)$$

donde A es un ángulo.