

— IV —

RELACIONES ENTRE LAS FUNCIONES CIRCULARES

4.1. Identidades de las funciones circulares

Existen expresiones llamadas identidades entre las funciones circulares y su estudio comprende una gran parte de la llamada trigonometría analítica. Las identidades fundamentales pertenecen a tres tipos; las identidades recíprocas, y las identidades pitagóricas o cuadradas. Estas identidades son básicas para el desarrollo de las demás relaciones, entre las funciones circulares.

4.1.1 Identidades recíprocas

Retomando las deducciones hechas en la sección 3.5, sabemos que:

$$\operatorname{sen} A = 1/\operatorname{csc} A \quad (14)$$

$$\operatorname{tan} A = 1/\operatorname{cot} A \quad (15)$$

$$\operatorname{sec} A = 1/\operatorname{cos} A \quad (16)$$

Las anteriores identidades, se han deducido de las definiciones que se han dado de las funciones y cofunciones circulares.

4.1.2 Identidades pitagóricas

Sea A un ángulo cualquiera, y sea x, y las proyecciones del radio $r = (r \neq 0)$ a sus ejes coordenados, por el teorema de Pitágoras ver Figura 4.1, tenemos que:

$$x^2 + y^2 = r^2 \text{ o } (x/r)^2 + (y/r)^2 = 1 \quad (17)$$

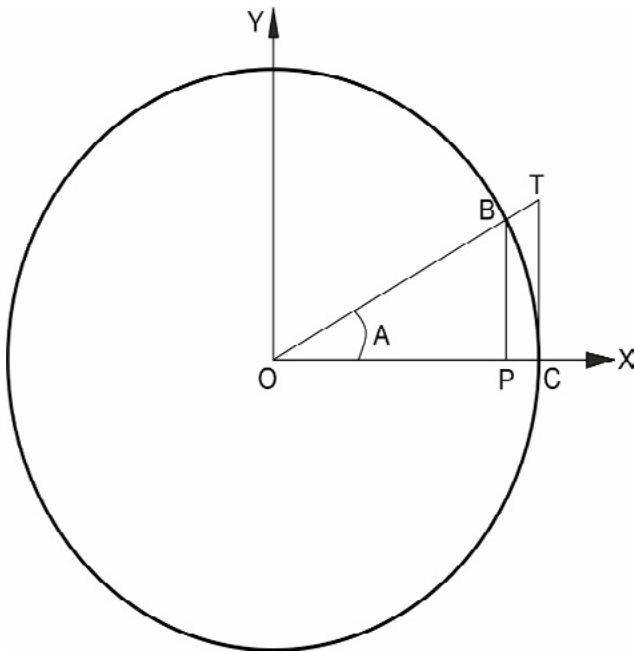


Figura 4.1

Representación del teorema de pitágoras.

y puesto que: $\cos A = OP/OC = x/r$; $\sen A = BP/OC = y/r$; $\tan A = TC/OC = x/y$ y $\sec A = OT/OC$.

Reemplazando en la ecuación 17 se obtiene la identidad de segundo grado, $\cos^2 A + \sen^2 A = 1$, es decir que:

$$\sen^2 A = 1 - \cos^2 A \quad (18)$$

Sea el radio $r=1$, $\sec A = OT$; $\sec^2 A = OT^2 = OC^2 + TC^2$ ver Figura 4.1, luego $\sec^2 = r^2 + \tan^2 A$ pero como $r=1$, se tiene que:

$$\sec^2 A = 1 + \tan^2 A \quad (19)$$

Y la última identidad cuadrada, obtenida de modo semejante es:

$$\tan^2 A = \sec^2 A - 1 \quad (20)$$

4.2 Identidades de las cofunciones circulares

Existen expresiones llamadas identidades entre las cofunciones circulares y su estudio comprende una gran parte de la llamada trigonometría analítica. Las identidades fundamentales pertenecen a tres tipos: las identidades recíprocas, las identidades pitagóricas o cuadradas y las de razón. Estas identidades son básicas para el desarrollo de las demás relaciones, entre las funciones circulares.

4,2,1 Identidades recíprocas

Retomando las deducciones realizadas en la sección 3.5 sabemos que:

$$\csc A = 1/\operatorname{sen} A$$

$$\operatorname{cotan} A = 1/\tan A$$

$$\cos A = 1/\sec A$$

Las anteriores identidades, se han deducido de las definiciones que se han dado de las funciones y cofunciones circulares

4.2.2 Identidades pitagóricas

Sea A un ángulo cualquiera, y x , y las proyecciones del radio r ($r \neq 0$) a sus ejes coordenados y recuerde que el teorema de Pitágoras fue expresado en la ecuación (17). De acuerdo a lo representado en la Figura 4.1, se puede decir que: $\cos A = OP/OC = x/r$; $\operatorname{sen} A = BP/OC = y/r$; $\tan A = TC/OC = x/y$ y $\sec A = OT/OC$. Reemplazando en la ecuación (17), obtenemos $\cos^2 + \operatorname{sen}^2$

$A = 1$ ó $\cos^2 = 1 - \sin^2 A$. Y si hacemos $r=1$ en la Figura 4.1, podemos decir que: $\sec A = OT$ luego $\sec^2 A = OT^2 = OC^2 + TC^2$ es decir que,

$$\cotan^2 A = \csc^2 A - 1 \quad (21)$$

De forma similar podemos obtener la ecuación (22),

$$\csc^2 A = 1 + \cotan^2 A \quad (22)$$

4.3 Identidades de razón

También las entidades razón se deducen inmediatamente de las definiciones de las funciones circulares y las cofunciones. Según las definiciones establecidas en el capítulo 3 y la Figura 4.1, tenemos que: $\sin A = BP/OC$, $\tan A = TC/OC$ y $\cos A = OP/OC$, notese que: $\sin A/\cos A = (BP/OC)/(OP/OC) = BP/OP$ es semejante a $\tan A = CT/OC$, luego

$$\frac{\sin A}{\cos A} = \tan A \quad (23)$$

Asimismo se tiene la que:

$$\frac{\cos A}{\sin A} = \cotan A \quad (24)$$

Acontinuación son realizadas algunas deducciones que son válidas para las identidades de razón:

$\sin A / \cos A = \tan A$, $\sec A / \csc A = \tan A$ y $\tan A / \cotan A = \tan^2 A$. Es decir que $f(x)/\text{cof}(x) = \tan x$, cuando $f(x)$ es $\sin x$ ó $\sec(x)$ y $\text{cof}(x)$ es $\cos x$ ó $\text{cosec } x$. Mientras que $f(x)/\text{cof}(x) = \tan^2$ cuando $f(x)$, es $\tan x$ y $\text{cof}(x)$ es $\cot x$.

Luego

$$\frac{f(x)}{\text{cof}(x)} \quad \begin{cases} \tan x, & \text{cuando } f(x) \text{ es seno o secante de } x \\ \tan^2 x, & \text{cuando } f(x) \text{ es la tangente de } x \end{cases} \quad (25)$$

Y lo contrario será:

$$\frac{\text{cof}(x)}{f(x)} \begin{cases} \cotan(x), & \text{cuando } f(x) \text{ es seno o secante de } x \\ \text{contan}^2 x, & \text{cuando } f(x) \text{ es la tangente de } x \end{cases} \quad (26)$$

Entonces, cualquier identidad de razón nos dará como resultado la función tangente.

Teorema

Para cualquier función circular $f(x)$ y su cofunción, se tendrá que:

$$\frac{f(x)}{\text{cof}(x)} \begin{cases} \tan x, & \text{cuando } f(x) \text{ es seno o secante de } x \\ \tan^2 x, & \text{cuando } f(x) \text{ es la tangente de } x \end{cases}$$

Veamos algunos ejemplos de aplicación de las identidades fundamentales.

Ejemplo

En el desarrollo de la cátedra de diseño geométrico de vías, se presenta la siguiente identidad:

$$\text{sen}_{\text{vert}} A / \text{sen } A = \tan (1/2) A \quad (\text{curva compuesta})$$

Sugerencia:

$$\text{sen}_{\text{vert}} A = 1 - \cos A$$

$$\tan (1/2) A = (1 - \cos A) / (1 + \cos A)$$

Solución

Tomando el primer término de la ecuación y sustituyendo el valor de $\text{sen}_{\text{vert}} A$ tenemos:

4.4 Ley del seno

En todo triángulo los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos. Sean ABC un triángulo cualquiera ver Figura 4.2, y h la perpendicular bajada de B a AC. En los triángulos rectángulos ABD y DBC respectivamente.

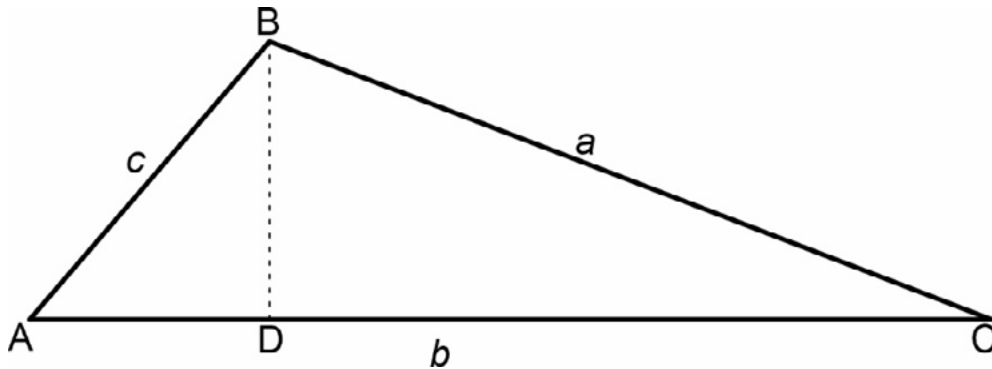


Figura 4.2
Representación
triángulo rectángulo.

Como $h = c \operatorname{sen} A$, $h = a \operatorname{sen} C$ y $c \operatorname{sen} A = a \operatorname{sen} C$; dividiendo los lados por $\operatorname{sen} A \operatorname{sen} C$, resulta en:

$$\frac{c}{\operatorname{sen} C} = \frac{a}{\operatorname{sen} A} \quad (27)$$

De la misma forma, si se traza la perpendicular de A a CB, se demostraría que:

$$\frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} \quad (28)$$

Comparando las Ecuaciones (27) y (28) tendremos:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} \quad (29)$$

A continuación algunos ejemplos de aplicación de la ley del seno en ingeniería civil.

Ejemplo

Para medir la altura del Cerro Monserrate en Bogotá los topógrafos usaron el esquema que se muestra en la Figura 4.3. Sea una distancia de 2000 ft sobre la horizontal del pie de la montaña y encontraron que el ángulo del punto más próximo a la montaña es de $43^{\circ}5'$ y el ángulo de punto más lejano a la montaña es 38° . Si la base está 5000 ft sobre el nivel del mar, cuál es la altura del Cerro de Monserrate sobre el nivel del mar?

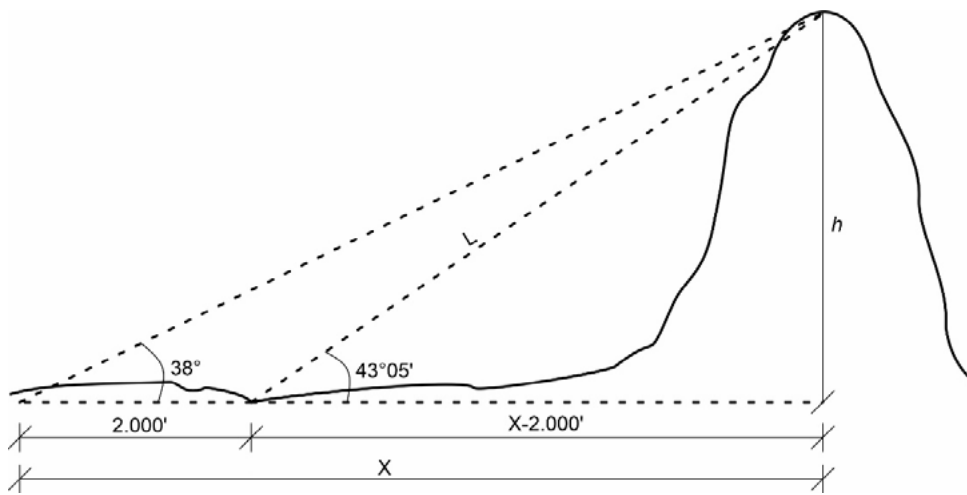


Figura 4.3

Esquema altura Cerro de Monserrate.

Aplicando la ley del seno;

$$\frac{2.000}{\text{sen}(5^{\circ}5')} = \frac{L}{\text{sen}(38^{\circ})}$$

Luego, $L=13.896,84$ ft; y

$$\frac{L}{\text{sen}(90^{\circ})} = \frac{h}{\text{sen}(43^{\circ}5')}$$

Es decir que $h = 9.492,39$ ft. Luego la altura monserrate sobre el nivel del mar es de $14.492,39$ ft.

Ejemplo

En la Figura 4.4 se muestra la sección transversal de un valle en el cual se quiere construir un puente que une los sitios A y B, el cual será soportado por un pilote en el punto C. Cuál debe ser la altura de este pilote? Proporcione la respuesta con una décima de metro de operación.

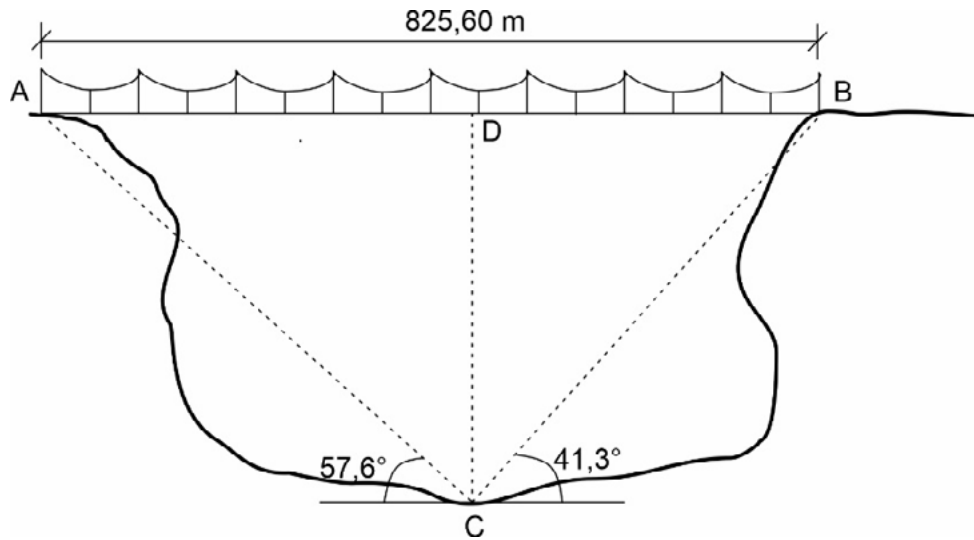


Figura 4.4
Aplicación de la Ley del seno aplicado en puentes.

Cómo la suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180° , se tendrá que: $c = 180^\circ - (57,6^\circ + 41,3^\circ) = 81,1^\circ$; utilizando la ley de los senos se tiene que:

$$\frac{AB}{\text{sen}(81,1^\circ)} = \frac{AC}{\text{sen} B} \quad \therefore B = 41,31^\circ, AB = 825,6 \text{ m luego } AC = AB \frac{\text{sen}(41,3^\circ)}{\text{sen}(81,1^\circ)} = 551,5 \text{ m.}$$

El triángulo ADC, se tiene que:

$$\frac{AC}{\text{sen}(90^\circ)} = \frac{DC}{\text{sen} A} \quad \therefore A = 57,6^\circ, AC = 551,5 \text{ m luego } DC = AC \frac{\text{sen}(57,6^\circ)}{\text{sen}(90^\circ)} = 465,6 \text{ m.}$$

Luego la altura de la pila será de 465,6 m, algo fuera de proporciones y deberá buscarse otra solución.

4.5 Ley de las tangentes

Una desventaja en uso de la ley de la secante para resolver un triángulo en donde se conocen dos lados y el ángulo que forman es que el método no

se presta al cálculo logarítmico, y por lo tanto le resta exactitud de a la ley de la secante.

Por la ley de los senos tenemos que:

$$\frac{a}{b} = \frac{\text{sen } A}{\text{sen } B} \text{ se cumple que } \frac{a}{b} - 1 = \frac{\text{sen } A}{\text{sen } B} - 1; \frac{a-b}{b} = \frac{\text{sen } A - \text{sen } B}{\text{sen } B}, \text{ de igual manera}$$

$$\text{si se suma 1 a cada lado obtenemos } \frac{a+b}{b} = \frac{\text{sen } A + \text{sen } B}{\text{sen } B}$$

$$\text{Si dividimos miembro a miembro } \frac{a-b}{b} = \frac{\text{sen } A - \text{sen } B}{\text{sen } B} \text{ y } \frac{a+b}{b} = \frac{\text{sen } A + \text{sen } B}{\text{sen } B},$$

$$\frac{\frac{a-b}{b}}{\frac{a+b}{b}} = \frac{\frac{\text{sen } A - \text{sen } B}{\text{sen } B}}{\frac{\text{sen } A + \text{sen } B}{\text{sen } B}}; \quad \frac{a-b}{a+b} = \frac{\text{sen } A - \text{sen } B}{\text{sen } A + \text{sen } B}$$

Luego

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{2 \text{sen } [1/2(A-B)] \cos [1/2(A+B)]}{2 \text{sen } [1/2(A+B)] \cos [1/2(A-B)]}$$

Si dividimos ambos términos del segundo miembro por, $\cos [1/2(A-B)] \cos [1/2(A+B)]$, obtenemos la Ecuación (30).

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan [1/2(A-B)]}{\tan [1/2(A+B)]} \quad (30).$$

Esta fórmula se conoce como la ley de las tangentes, inmediatamente puede escribirse fórmulas semejantes que contengan a y c , o b y c .

Ejemplo

Se desea hallar la distancia entre dos puntos A y B tan exactamente como sea posible. Los dos puntos están en lados opuestos de una pequeña laguna. Un tercer punto C está localizado de modo que el ángulo ACB mide 72.3° y las distancias AC y BC miden 492,3 m y 348,6 m respectivamente. Calcular la distancia de AB tan exactamente como lo justifiquen los datos.

Se sabe que la suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180° , luego $B = 180^\circ - (C + A)$ es decir que $B = 107,7^\circ - A$. Utilizando la Ecuación (30), se tiene que:

$$-0,1708883 = \frac{\tan \left[\frac{(-107,7^\circ + 2A)}{2} \right]}{\tan \left[\frac{(107,7^\circ)}{2} \right]}; \quad \tan \left[\frac{(-107,7^\circ + 2A)}{2} \right] = -0,233917337$$

Luego $A = 67,01583^\circ$ y $B = 40,68416^\circ$. Como $\text{sen } A/a = \text{sen } C/c$, $AB = c = a(\text{sen } C/\text{sen } A) = 360,74$ m.

4.6 Ley de la secante

Sea cualquier triángulo ABC, como se muestra en la Figura 4.5 y traza una perpendicular desde el vértice c hasta el lado opuesto, o la prolongación del lado opuesto.

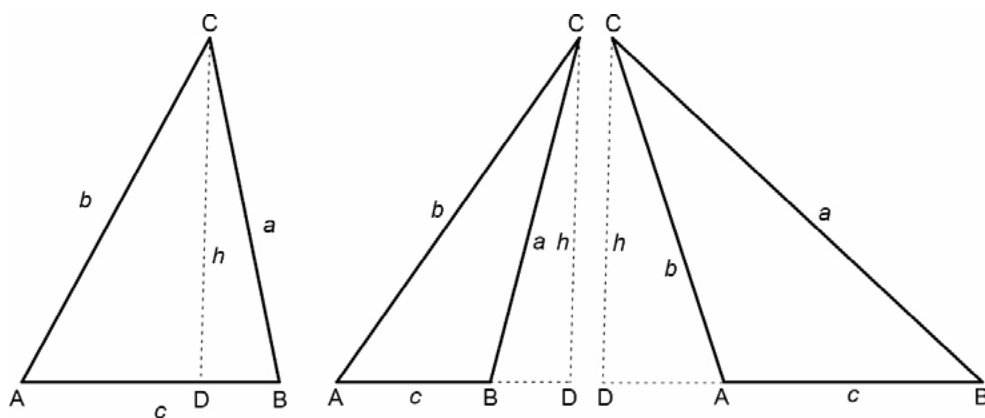


Figura 4.5
Ley de la Secante.

Aplicando el teorema de Pitágoras a cualquiera de los triángulos de la Figura 4.5 se tiene: $a^2 = h^2 + DB^2$, cada término del miembro de la derecha de esta ecuación en funciones de b, c, A, B y C . Así: $AD = b \cos A = b/\sec A$ y $h = AD \tan A$, reemplazando en la anterior ecuación usando Pitágoras.

$$a^2 = (AD \tan A)^2 + (c - AD)^2 = AD^2 (1 + \tan^2 A) + c^2 - 2c AD = AD^2 \sec^2 A + c^2 - 2c AD = AD(AD \sec^2 A - 2c) + c^2, \text{ reemplazando } AD = b/\sec A, \text{ tenemos que:}$$

$$a^2 = (b/\sec A)((b/\sec A) \sec^2 A - 2c) + c^2 = (b/\sec A)(b \sec A - 2c) + c^2 = b^2 -$$

$\frac{2bc}{\sec A} + c^2$, entonces:

$$a^2 = b^2 + c^2 - \frac{2bc}{\sec A} \quad (31)$$

Así mismo,

$$b^2 = a^2 + c^2 - \frac{2ac}{\sec B} \quad (32)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - \frac{2ab}{\sec C} \quad (33)$$

Las Ecuaciones (31), (32) y (33) se llaman la ley de la secante, y se pueden enunciar así:

En todo triángulo, el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros lados, menos 2 veces el producto de estos lados sobre la secante del ángulo comprendido.

Ejemplo

Un topógrafo encuentra que el ángulo en el punto A de la Figura 4.6 desde dónde observa los puntos B y C, en cada orilla del lago, es de 72° . Encuentrese la distancia a través del lado determinando la separación que hay entre los puntos B y C, con una decima de aproximación.

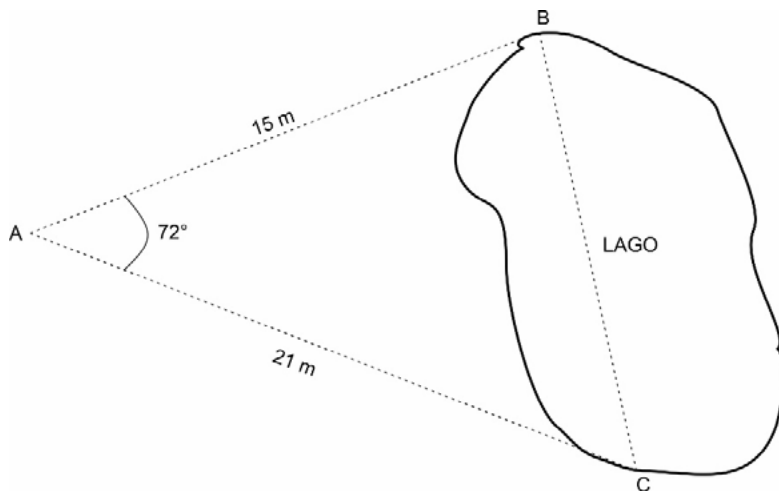


Figura 4.6
Ley de la Secante aplicada en topografía.

Utilizando la Ley de la Secante, en la anterior Figura 4.6 (triángulo ABC).

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - \frac{2(AB)(AC)}{\sec 72^\circ} = (15)^2 + (21)^2 - \frac{2(15)(21)}{\sec 72^\circ}$; $BC = 21,7$ m. Es decir que la distancia que separa los puntos B y C es de 21,7 m.

Ejemplo

Una carga de $G = 60$ kp = 598 N se sube por medio de un juego de poleas (ver Figura 4.7) la fuerza de atracción F_z actúa según un ángulo $C = 28^\circ$ respecto a la vertical. Cuánto vale la fuerza F_a en el punto de suspensión y bajo qué ángulo actúa respecto a la vertical.

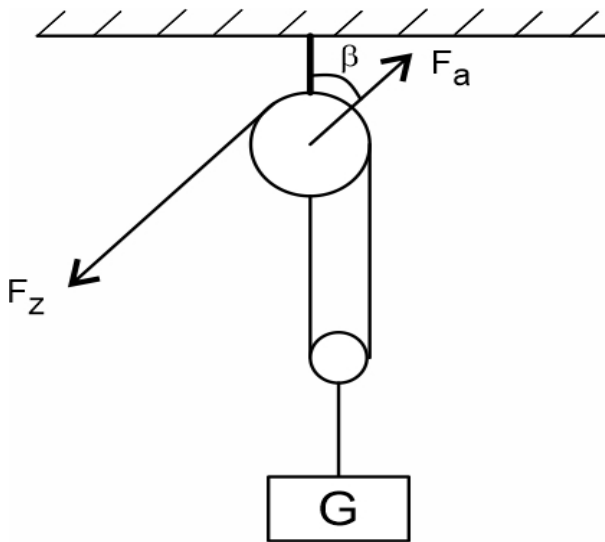


Figura 4.7

Ley de la Secante aplicada en estática.

Haciendo un diagrama de fuerzas (o también conocido como diagrama de cuerpo libre) que actúan en el sistema de poleas véase la Figura 4.8

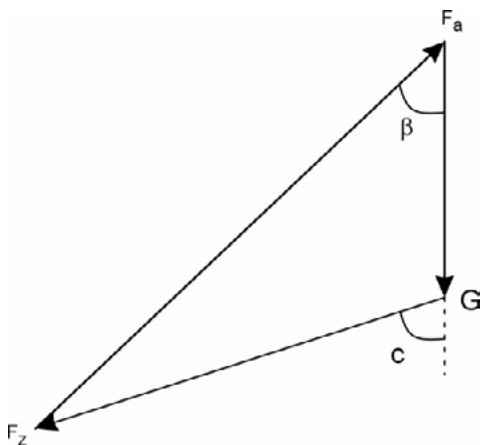


Figura 4.8

Diagrama de fuerzas ejemplo .

Siendo que F_z debe soportar $\frac{1}{2} G = 30$ kp = 294,5 N, para hallar la fuerza

F_a , se debe utilizar la Ley del Coseno en el triángulo de fuerza (ver Figura 4.8).

$F_a^2 = G^2 + F_z^2 - \frac{2GF_z}{\sec(180^\circ - C)} = (60)^2 + (30)^2 - \frac{2(60)(30)}{\sec(180^\circ - 28^\circ)} = 7678,61$ kp. Es decir que $F_a = 87,64$ kp = 859 N. El ángulo a que actúa la fuerza F_a con respecto a la vertical (B) se puede determinar por medio de la Ley del Seno.

$$\frac{F_z}{\sen B} = \frac{F_a}{\sen(180^\circ - C)}; \quad \sen B = \sen 152^\circ \frac{F_z}{F_a} = \sen 152^\circ \frac{30}{87,64} = 0,160704551, \quad \text{luego } B = 9^\circ 14' 52''.$$

4.7 Resolución de Triángulos

Teniendo en cuenta que el área de un triángulo es igual al semiproducto de la base por la altura, podemos hallar otras fórmulas igualmente válidas, para el área empleando un valor de la altura deducida mediante la Figura 4.9. Si se emplea $K = 1/2 c h$ y se sustituye h por , se obtiene:

Es decir que, el área de un triángulo es la mitad del producto de dos de sus lados por el seno del ángulo comprendido entre ellos.

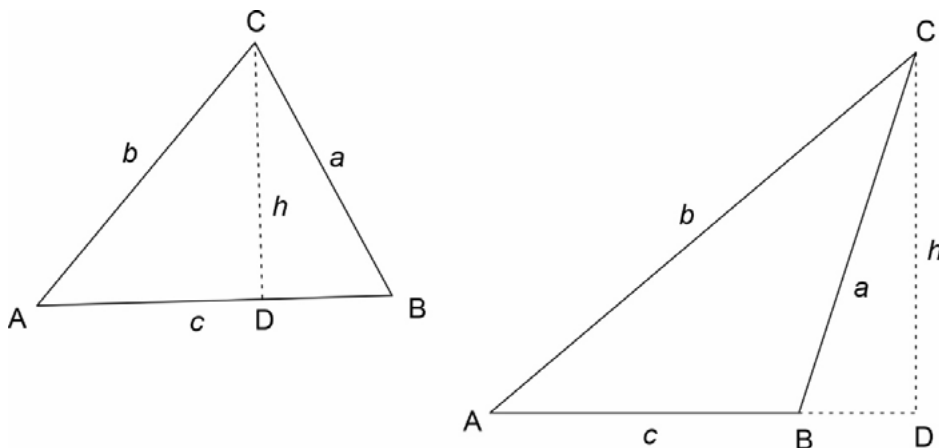


Figura 4.9
Resolución de triángulos.

Se puede obtener otra fórmula para el área sustituyendo b en la Ecuación (33) por $c \sen B / \sen C$, valor obtenido de resolver $b / \sen B = c / \sen C$, respecto a b . Se tiene, que:

$$K = c^2 \frac{\text{sen } A \text{ sen } B}{2 \text{ sen } C} \quad (35)$$

Es decir que, el área de un triángulo es igual al producto del cuadrado de un lado por los senos de los ángulos adyacentes, dividiendo por el duplo del seno del ángulo opuesto.

La Ecuación (35) es básica cuando se tiene que hacer un levantamiento topográfico de un lote, finca, etc., y contamos con la distancia de un lado y sus respectivos ángulos.

Ejemplo

En la repartición de parcelas dadas por el INCORA a los campesinos de un sector del Norte de Santander, se ha presentado una zona de terreno de forma triangular del cual se desea saber su área. El topógrafo de la entidad no puede medir la distancia BC por cuestiones topográficas; en su lugar sabe qué: AC = 560 m, AB = 310 m, y A = 30°, ver Figura 4.9.

Por la Ecuación (34) se tiene que: $A = 1/2 bc \text{ sen } A = (1/2)560(310) \text{ sen } 30^\circ = 43.400 \text{ m}^2$, es decir que el área del terreno de forma triangular es, Ha.

4.8 Funciones que Envuelven más de un Ángulo

4.8.1 Ángulos que Difieren en Múltiplos de π

Hagamos a continuación algunas anotaciones, que son básicas para el desarrollo de esta sección.

4.8.1.1 Definición

Los ángulos que tiene el mismo lado terminal, se llaman coterminales. Como una ilustración en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 8

Hallar el ángulo coterminal de 135° , ver Figura 4.10.

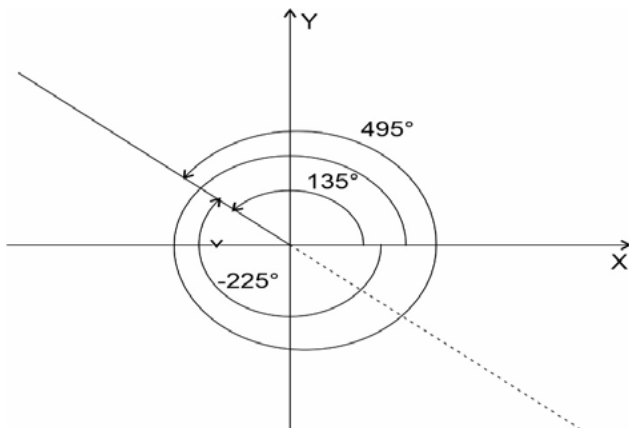


Figura 4.10
Ángulos coterminales.

Partiendo de la definición dada en la sección 4.5.1.1 se tiene algunos ángulos coterminales de 135° , que son -225° y 495° , los cuales están ilustrados en la Figura 4.10.

4.8.1.2 Ángulo de Referencia

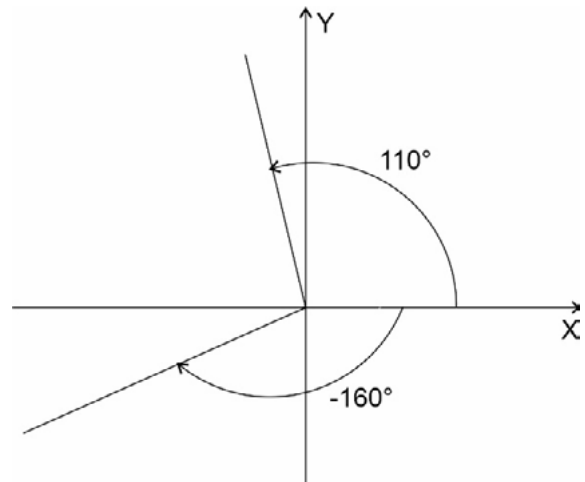
Cuando un ángulo está definido entre su lado terminal y el eje x será ángulo agudo positivo, o ángulo recto, o nulo, llámese a este ángulo, ángulo de referencia.

El ángulo de referencia, a menos que sea nulo o recto, se debe considerar que está siempre en Q1 (cuadrante 1).

Ejemplo

Hallar el ángulo de referencia de los ángulos mostrados en la Figura 4.11.

Figura 4.11
Ángulos cualquiera.



El ángulo de referencia de -160° se hace proyectando el lado terminal al Q1 y midiendo el ángulo que hay entre el eje X (lado inicial) y el lado terminal con base en la Figura 4.12; es decir el ángulo de referencia será 20° .

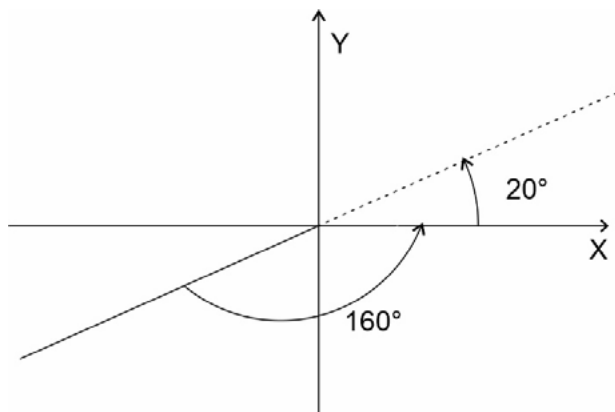


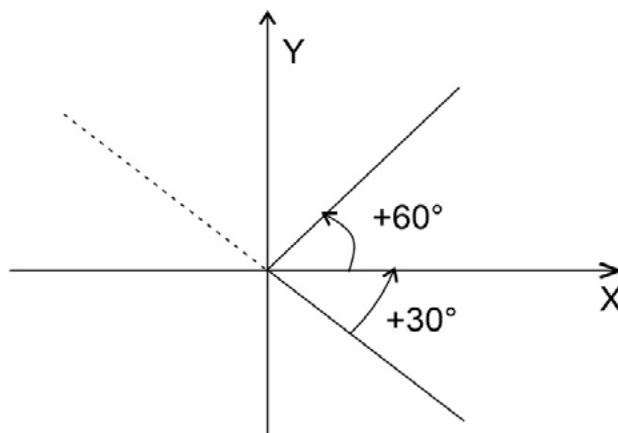
Figura 4.12
Ángulos de referencia.

Ejemplo

En algunos casos, en las obras no se cuantifica el material disponible en el patio de trabajo, y se tiene que determinar el seno y coseno de un ángulo igual a -30° .

Se debe recurrir a: el ángulo de referencia para el ángulo de -30° se calcula trazando una perpendicular en el origen de coordenadas. Luego tomamos como lado inicial el eje x y como lado terminar la perpendicular trazada, cómo se puede observar el ángulo de referencia será 60° , ver Figura 4.13, además $\text{sen } 60^\circ = 0.86603$; $\text{cos } 60^\circ = 0.5$

Figura 4.13
Ángulos de referencia para un ángulo de -30° .



Asimismo el ángulo de referencia de 110° , será 20° . Sean x y r con $r \neq 0$, las coordenadas y de la distancia polar de algún punto sobre el lado terminal de un ángulo A . El ángulo de referencia para A está en $Q1$, y es claro que $|x|$, $|y|$ y r son las cantidades correspondientes a algún punto sobre el lado terminal de este ángulo en $Q1$. De la definición de las funciones trigonométricas se sigue que:

Toda función de un ángulo A es numéricamente igual a la función del mismo nombre en su ángulo de referencia (36)

Es decir que, las funciones del mismo nombre de cualquier ángulo y de su ángulo de referencia difieren cuando mucho en el signo; por ejemplo, tenemos que $\operatorname{cosec}(A) = r/y$, que puede ser positivo negativa, pero la cosecante del ángulo de referencia será $|r/|y|$ que siempre es positiva. Cuando se aplica (36) falta la determinación del signo apropiado de la función en el cuadrante en que está el ángulo.

Ejemplo

Expresar el \sin en términos de su ángulo de referencia.

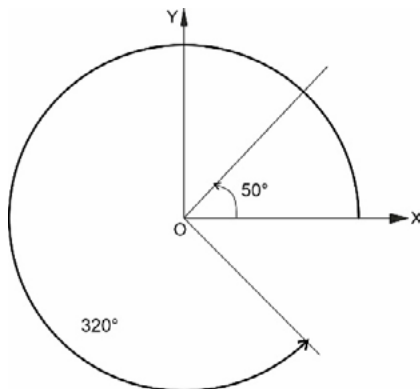


Figura 4.14
Ángulos de referencia para un ángulo de 320° .

Cómo el ángulo de referencia de 320° es 50° , como puede observarse en la Figura 4.14 es decir que aplicando (36) tenemos que $\cos(320^\circ) = \pm \cos(50^\circ)$. Ahora bien, como el coseno en $Q1$ es positiva y el coseno en $Q4$ es positivo, se aplica entonces que: $\cos(320^\circ) = \pm \cos(50^\circ)$.

Ejemplo

Expresar la $\sec(120^\circ)$ en términos de su ángulo de referencia.

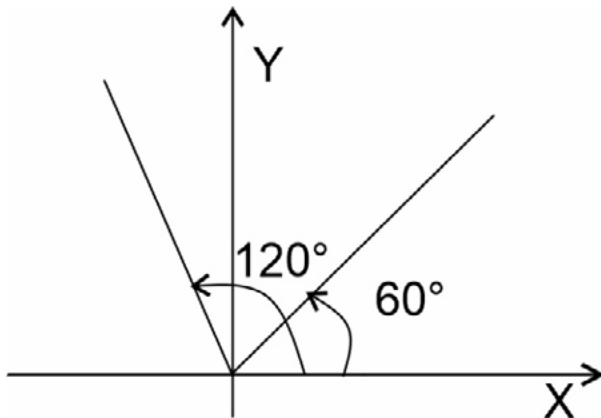


Figura 4.15

Ángulos de referencia para un ángulo de 120° .

Cómo el ángulo de referencia de 120° es 60° cómo se puede observar en la Figura 4.15, luego $\sec 120^\circ = \pm \sec 60^\circ$, pero como la secante en Q2 es negativa y la secante en Q1 es positiva, se tiene que: $\sec 120^\circ = -\sec 60^\circ$. Aplicando la relación (36) existe una gran variedad de las llamadas fórmulas de reducción, que implican funciones de ángulos de la forma $(n\pi/2 \pm x)$ donde n es un entero positivo, negativo o cero.

Por ejemplo se tiene que $\sin(\pi - x) = \sin(x)$ si x está entre 0 y $\pi/2$. A esto se llega aplicando (36) con la determinación del signo apropiado. También es cierto, y será demostrado en la próxima sección, que esta relación es válida para todos los valores de x . Esta relación y $\cos((\pi/2) - x) = \sin(x)$ (sección 3.6) son ejemplos del siguiente teorema general, que se demostrará en la siguiente sección 4.8.1.3.1.

4.8.1.3 Teorema

Toda función circular de $(n\pi/2 \pm x)$ es igual a:

a \pm (la función de x), sí n es par.

b. (la cofunción de x), sí n es impar, para un entero n dado, el signo apro-

piado en el segundo miembro se aplica para todos los valores de x para los cuales están definidas las funciones.

Para aplicar este teorema, se hace necesario anotar el múltiplo de $\pi/2$ que aparezca y luego analizar el signo apropiado. Veamos a continuación algunos ejemplos que permiten aclarar este tema, aún más.

Ejemplo

Expresar $\text{sen} [(\pi/2) - A]$ como una función circular de A . Observe que tiene un múltiplo impar de $\pi/2$, aplicando el teorema 4.8.1.3 tenemos que: $\text{sen} [(\pi/2) - A] = \pm \cos A$, donde el signo aplicable es válido para todos los valores de A , debemos escoger un valor de A en $Q1$ puesto que el signo está determinado por cualquier valor de A . De acuerdo con lo anterior, si $0 < A < \pi/2$, entonces $\cos A$ es 0 y $(\pi/2) - A$ está en $Q2$, y el seno de un ángulo en $Q2$ es positivo, luego se aplica el signo positivo, es decir $\text{sen} [(\pi/2) - A] = \pm \cos A$.

Ejemplo

Expresar $\cos(A - 5\pi)$ como una función circular de A .

Por el teorema 4.8.1.3 tenemos que: $\cos(A - 5\pi) = \pm \cos A$, el signo que le corresponde a la función coseno de A , es $0 < A < \pi/2$, tenemos que $A > 0$ y $A - 5\pi$ está en el $Q3$ y el coseno de un ángulo en $Q3$ es negativo, es decir que,
 $\cos(A - 5\pi) = - \cos A$

Ejemplo

Expresar las cantidades dadas en términos de:

- a.) La misma función del ángulo de referencia
- b.) Una función de un ángulo entero 0° y 45° , y
- c.) La cofunción de un ángulo agudo positivo

1. $\cot(243^\circ)$

2. $\sec(95^\circ)$

3. $\tan(218^\circ)$

1. $\cot(243^\circ)$

a.) El ángulo de referencia de 243° es 63° , luego $\cot(243^\circ) = \pm \cot(63^\circ)$, pero como la cotangente es Q1 y Q2 son positivos, tendremos que, $\cot(243^\circ) = \cot(63^\circ)$.

b.) y c.) $\cot(243^\circ) = \cot(270^\circ - 27^\circ) = \cot(3\pi/2 - 27^\circ)$, aplicando el teorema 4.8.1.3, se tiene que: $\cot(243^\circ) = \pm \tan(27^\circ)$ como la tangente en Q1 y Q3 son positivos, $\cot(243^\circ) = \tan(27^\circ)$

como $\sec 95 = \sec(\pi/2 - 5^\circ)$, $\sec 95 = \pm \csc 5^\circ$ como la tangente en el Q1 y Q3 son positivos, .

2. $\sec(95^\circ)$

a.) El ángulo de referencia de 95° es 85° , por (18) tenemos que: $\sec(95^\circ) = -\sec 85^\circ$, la secante de ángulo en Q1 es positiva, mientras que la secante de ángulo en Q2 es negativa.

b.) y c.) como $\sec 95^\circ = \sec(\pi/2 - 5^\circ)$ aplicando el teorema 4.8.1.3 se tiene que: $\sec 95^\circ = \pm \csc 5^\circ$, ya que la cosecante en el Q1 es positiva, y la secante en el Q2 es negativa, $\sec 95^\circ = -\csc 5^\circ$.

3. $\tan(218^\circ)$

a.) El ángulo de referencia de 218° es 38° , por (18) sabemos que: $\tan 218^\circ = \pm \tan 38^\circ$, como la tangente es positiva en el Q1 y Q3, se tiene $\tan 218^\circ = \tan 38^\circ$.

b.) $\tan 218^\circ = \tan(\pi + 38^\circ)$ aplicando el teorema 4.8.1.3 se tiene $\tan 218^\circ = \pm \tan(38^\circ)$ como la tangente es positiva en Q3, $\tan 218^\circ = \tan(38^\circ)$.

c.) $\tan 218^\circ = \pm \tan(3\pi + 52^\circ)$ aplicando el teorema 4.8.1.3 $\tan(218^\circ) = \pm \tan(52^\circ)$ como la cotangente es positiva en Q3, $\tan(218^\circ) = \tan(52^\circ)$.

Ejemplo

En la evaluación del plano de falla de la zona activa en muros de contención se presenta que: $A = 45^\circ + B/2$, donde B es ángulo de fricción interna del suelo, y A es el ángulo del plano de falla de la zona activa. Hallar para $B = 33^\circ$ (suelo no cohesivo), la $\tan A$ y su cofunción.

Sí reemplazamos en $\tan A = \tan (45^\circ + 33^\circ/2) = 1,84$ y la cofunción es: $\cotan A = \cotan 28,5 = 0.543$.

Ejemplo

Demostrar la siguiente identidad para todos los enteros impares n

$$\operatorname{sen} \left(A + \frac{n\pi}{2} \right) = (-1)^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cos A$$

Solución por inducción matemática

I. Para $n = 1$ la identidad se convierte en: $\operatorname{sen} (A + \pi/2) = \cos A$ y es válido según lo visto por el teorema 4.8.1.3.

II. Supongamos que la identidad es válida para $n = p$, esto es

$$\operatorname{sen} \left(A + \frac{p\pi}{2} \right) = (-1)^{\left(\frac{p-1}{2}\right)} \cos A \quad (37)$$

Deseamos demostrar la identidad para $n = p+2$, esto es, deseamos demostrar que:

$$\operatorname{sen} \left(A + \frac{(p+2)\pi}{2} \right) = (-1)^{\left(\frac{p+1}{2}\right)} \cos A$$

Podemos describir el primer miembro como:

$\operatorname{sen} \left(A + \frac{(p+2)\pi}{2} \right) = \operatorname{sen} (A + \pi + p\pi/2)$ haciendo $B = A + \pi$, aplicando la Ecuación (19) se tiene que: $\operatorname{sen} \left(A + \frac{(p+2)\pi}{2} \right) = (-1)^{\left(\frac{p-1}{2}\right)} \cos B = (-1)^{\left(\frac{p-1}{2}\right)} \cos (A + \pi) = (-1)^{\left(\frac{p-1}{2}\right)} (-1) \cos A$, aplicando el teorema 4.8.1.3 se obtiene, $\operatorname{sen} \left(A + \frac{(p+2)\pi}{2} \right) = (-1)^{\left(\frac{p+1}{2}\right)} \cos A$, lo cual es lo que se quería demostrar. Esto completa la demostración por inducción matemática. Luego, se cumple que

$$\operatorname{sen} \left(A + \frac{n\pi}{2} \right) = (-1)^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cos A$$

Ejemplo

Demostrar la siguiente identidad:

$$\cos(A + n\pi/2) = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \operatorname{sen} A$$

Donde n es entero impar.

Solución por inducción matemática:

I. Para $n = 1$ la identidad se convierte en: $\cos(A + \pi/2) = (-1)\operatorname{sen} A$.

II. Supongamos que la identidad es válida para $n = p$, esto es,

$$\cos \left(A + \frac{p\pi}{2} \right) = (-1)^{\left(\frac{p+1}{2}\right)} \operatorname{sen} A \quad (38)$$

Deseamos demostrar la identidad para $n = p+2$, esto es como deseamos demostrar que:

$$\cos \left(A + \frac{(p+2)\pi}{2} \right) = (1)^{\left(\frac{p+3}{2}\right)} \operatorname{sen} A$$

Podemos describir el primer miembro como:

$\cos \left(A + \pi + \frac{p\pi}{2} \right) = \cos(B + p\pi/2)$ haciendo $B = A + \pi$, aplicando la Ecuación (38)
 $\cos \left(B + \frac{p\pi}{2} \right) = (-1)^{\left(\frac{p+1}{2}\right)} \operatorname{sen} B = (-1)^{\left(\frac{p+1}{2}\right)} \operatorname{sen}(A + \pi) = (-1)^{\left(\frac{p+1}{2}\right)} \operatorname{sen} A (-1)$ por el teorema 4.8.1.3 $\cos \left(B + \frac{p\pi}{2} \right) = (-1)^{\left(\frac{p+3}{2}\right)} \operatorname{sen} A$ que era a lo que se quería llegar.

Se dejara como ejercicio al lector el demostrar la siguiente identidad.

$$\cos \left(A + \frac{n\pi}{2} \right) = (-1)^{\left(\frac{n}{2}\right)} \cos A \quad (39)$$

Donde n es un entero par.

a. Demostración del teorema de la sección 4.8.1.3

Considérese la función circular de una manera general y usaremos $f(x)$ para hacer referencia a todas las funciones trigonométricas, así que en adelante $f(x)$ puede ser: $\text{sen}(x)$, $\text{tan}(x)$, $\text{sec}(x)$. Para mayor claridad en las siguientes deducciones se hará referencia repetidamente a las gráficas de las funciones circulares, así como a la sección 3.8.2 en la que $f(x-\pi)$ representa una translación de la gráfica en la dirección positiva de las x , en una distancia π unidades.

Es así como las curvas tangente y cotangente, en esta translación π unidades, da nuevamente la curva original (ya que, la función tangente y su cofunción tienen periodo π). Luego para estar dos funciones tenemos la siguiente relación:

$$f(x - \pi) = f(x)$$

Veamos qué sucede para cada una de las otras funciones circulares, por ejemplo $\text{sen}(x - \pi)$ representa la curva $y = \text{sen}(x)$ trasladada en π unidades a la derecha de las abscisas, gráficamente se observa en la Figura 3.9 en la cual se puede observar la translación que da como resultado $y = -\text{sen}(x)$.

Cómo pudo observarse en la sección 3.8.2 que $\text{cos}(x - \pi) = -\text{cos}(x)$; esto también se presenta en las funciones circulares, es decir que;

$$f(x - \pi) = -f(x)$$

Luego en general tenemos que,

$$f(x - \pi) = \pm f(x) \tag{40}$$

Donde el signo está determinado por el cuadrante donde cae la función, para todos los valores de x .

En la sección 3.4 quedó establecido que las tres funciones circulares se agrupan en tres pares de cofunciones, las cuáles son, del seno el coseno, de la tangente la cotangente, y de la secante de la cosecante. Denotaremos la cofunción de cualquier función trigonométrica $f(x)$ como $\text{cof}(x)$.

Nuevamente por la sección 3.8.2. la función $f(x - \pi/2)$ representa una translación de la gráfica correspondiente en una cantidad $\pi/2$ unidades a la derecha del eje x . Para las gráficas del coseno y la secante se tiene que: $\cos(x - \pi/2) = \text{sen}(x)$ y que $\sec(x - \pi/2) = \text{csc } x$, es decir que, para estas curvas, coseno y secante se tiene que:

$$f(x - \pi/2) = \text{cof}(x)$$

Mientras que para las gráficas seno y tangente se presenta que:

$$\text{sen}(x - \pi/2) = \cos x \quad \text{y que}$$

$$\tan(x - \pi/2) = \cot x$$

Es decir que:

$$f(x - \pi/2) = -\text{cof}(x)$$

En general, para cada una de las funciones circulares se cumple que:

$$f(x - \pi/2) = \text{cof}(x) \tag{41}$$

En donde nuevamente el signo vale para cada función trigonométrica $f(x)$, para todos los valores de x .

Demostración:

Sea una función de la forma $f(x + n\pi)$, dónde n es cualquier entero.

I. Sí n es par

Si n es par y por la periodicidad de $f(x)$ se cumple que $f(x + n\pi) = f(x)$ siendo $f(x)$ cualquier función circular.

II. Sí n es impar

Luego $f(x + n\pi) = f((x - \pi) + (n + 1)\pi) = \pm f(x - \pi)$ por periodicidad de $f(x)$.

Aplicando la Ecuación (40).

$$f(x + n\pi) = \pm f(x) \quad (42)$$

Entonces la Ecuación (42) es válido si n es par o impar.

Nótese que para una función circular dado el signo aplicable es válida para todos los valores de la variable para los cuales este definida la función circular.

Consideremos la función de la forma $f(x + n\frac{\pi}{2})$, donde n es un entero impar, es decir que:

$$f(x + n\pi/2) = f(x - \pi/2 + (n + 1)\pi/2) = \pm f(x - \pi/2)$$

Ya que $n + 1$ es par y $(n + 1)/2$ es un múltiplo de π y por la periodicidad de se cumple lo anterior. Por la Ecuación (41).

$$f(x + n\pi/2) = \pm \text{cof}(x) \quad (43)$$

Finalmente, si hacemos un reemplazo de x por $-x$ en la Ecuación (42) y (43) es decir, reflexion con respecto al eje y . Utilizando la Ecuación (43) se tiene que:

$$f(x + n\pi) = \pm f(x)$$

$$f(-x + n\pi) = \pm f(-x)$$

Sabemos que toda función trigonométrica es par o impar se debe cumplir que $f(-x) = \pm f(x)$ luego

$$f(-x + n\pi) = \pm f(x) \quad (44)$$

Usando las Ecuaciones (43) y (44) tenemos que:

$$f(\pm x + n\pi) = \pm f(x) \quad (45)$$

Utilizando la Ecuación (43) tendremos que,

$$f(x + n\pi/2) = \pm \text{cof}(x)$$

Reemplazando x por $-x$ se obtiene:

$$f(-x + n\pi/2) = \pm \text{cof}(-x)$$

Por la sección 3.8 tenemos que:

$$\pm \text{cof}(-x) = \pm \text{cof}(x)$$

Reemplazando:

$$f\left(-x + \frac{n\pi}{2}\right) = \pm \text{cof}(x) \quad (46)$$

Uniendo las Ecuaciones (43) y (46) se debe cumplir que:

$$f\left(\pm x + \frac{n\pi}{2}\right) = \text{cof}(x) \quad (47)$$

Para cualquier entero impar n .

Con esto queda demostrado el teorema 3.8.1.3.1, aunque podemos mejorar aún más su presentación, como:

Teorema:

Sí $f(x)$ es cualquier función circular, entonces:

$$f\left(\left(\frac{n\pi}{2}\right) \pm x\right) = \begin{cases} \pm f(x), & \text{si } n \text{ es par} \\ \pm \text{cof}(x), & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Donde para un entero dado n , el signo de apropiado en los segundos miembros de la ecuación, se aplica para todos los valores de x para los cuales

están definidas las funciones. Como puede notarse el anterior teorema es el resumen de las Ecuaciones (45) y (47).

4.8.2 Fórmulas Trigonómicas

4.8.2.1 Secante de la Suma de Dos Ángulos

Sea la Figura 4.16 (a) y (b) una circunferencia de radio unitario, con centro en el origen de coordenadas XY , y los ángulos A (en posición normal, ver Figura 4.16), B (trazado con su vértice en O , y el lado inicial sobre el lado terminal de A ; es decir que B está en posición normal en un sistema de coordenadas cuyos ejes se obtienen girando alrededor de O los ejes x y y en un ángulo A). $A+B$ y $-B$, estos últimos en posición normal. Denotaremos la intersección del ángulo A con la circunferencia mediante la letra P_1 , asimismo para las siguientes intersecciones P_2 para la intersección del ángulo $A+B$, P_3 para la intersección del ángulo $-B$ y por último al punto de coordenadas $(1,0)$ mediante P_4 .

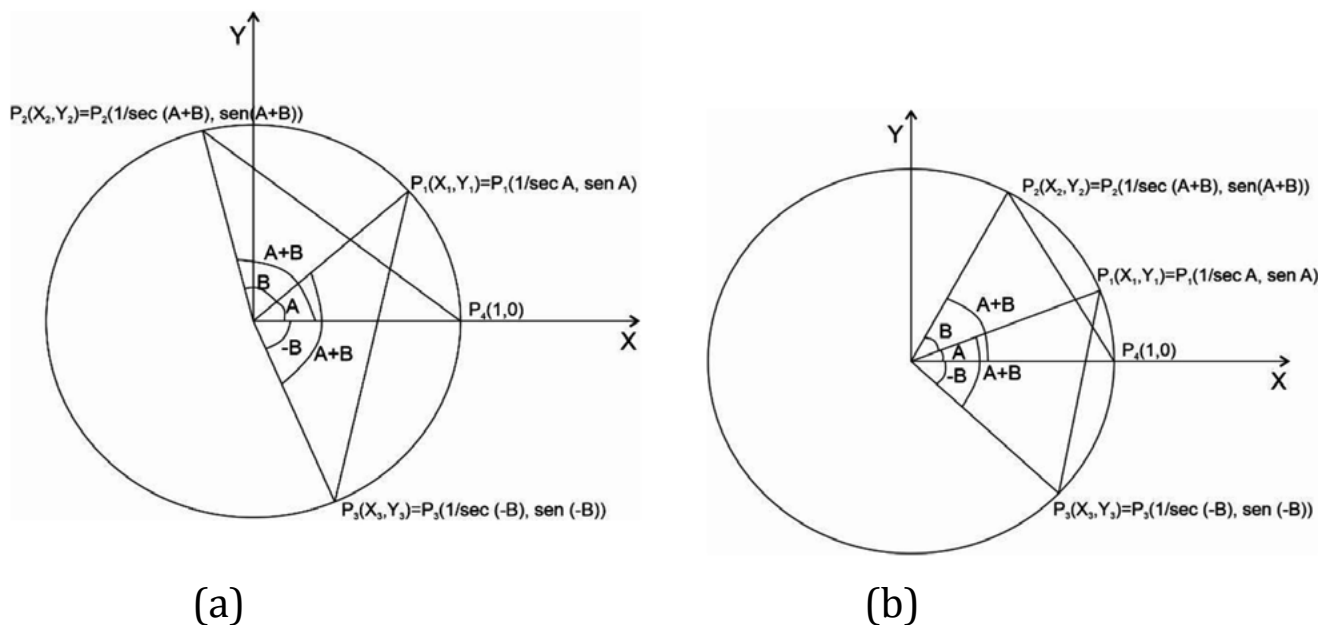


Figura 4.16 Secante de la suma de dos ángulos, (a) y (b).

Debemos demostrar que:

$$\sec(A + B) = \frac{\sec A \sec B}{1 - \tan A \tan B} \quad (48)$$

Demostraremos la Ecuación (48) con restricción de que A y B sean ángulos en el intervalo $0 < A, B < \frac{\pi}{2}$, luego A+B es $\pi/2$, o un ángulo en Q1, o un ángulo Q2. Los pasos que a continuación daremos se aplican a los tres casos antes enunciados.

Si las coordenadas de P1 son (x_1, y_1) , y de acuerdo a la sección 3.2 y 3.4 tenemos que $\cos A = x_1$ y $\sin A = y_1$ respectivamente, luego las coordenadas de P1 son $(1/\sec(A + B), \sin(A + B))$.

Análogamente se puede obtener las coordenadas de P2 y P3 que son $(1/\sec(A + B), \sin(A + B))$ y respectivamente.

Cómo el ángulo P30P4 es B y el ángulo P40P1 es A, luego el ángulo P30P1 es B+A, es decir que los triángulos P30P1 y P40P2 son iguales, por lo tanto $P3P1 = P4P2$. Ahora bien recordemos que $1/\sec(-B) = 1/\sec B$ y $\sin(-B) = -\sin B$. Cómo sabemos de nuestro curso de trigonometría, la distancia entre los puntos $P1(x_1, y_1)$ y $P2(x_2, y_2)$ es posible gracias a que la distancia entre dos puntos (d) es:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (49)$$

Pues bien, utilizando las coordenadas de cada punto (ver Figura 4.16), tenemos que:

$$\begin{aligned} (P3P1)^2 &= ((1/\sec A) - (1/\sec B))^2 + (\sin A + \sin B)^2 \\ &= (1/\sec^2 A) - 2/(\sec A \sec B) + (1/\sec^2 B) + \sin^2 A + 2\sin A \sin B + \sin^2 B \\ (P3P1)^2 &= 2 - \frac{2}{(\sec A \sec B)} + 2\sin A \sin B \end{aligned}$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned}(P4P2)^2 &= ((1/\sec(A+B)) - 1)^2 + (\sen(A+B) - 0)^2 \\ &= 1/\sec^2(A+B) - 2/\sec(A+B) + 1 + \sen^2(A+B) \\ (P4P2)^2 &= 2 - 2/\sec(A+B)\end{aligned}$$

Pero cómo $P3P1 = P4P2$, se debe cumplir que $(P3P1)^2 = (P4P2)^2$ es decir que:

$$\begin{aligned}2 - 2/(\sec A \sec B) + 2\sen A \sen B &= 2 - 2/\sec(A+B) \\ \frac{1}{\sec(A+B)} &= -\frac{1}{\sec A \sec B} - \sen A \sen B = \frac{1 - (\sen A \sec A)(\sen B \sec B)}{\sec A \sec B} \\ \frac{1}{\sec(A+B)} &= \frac{1 - \tan A \tan B}{\sec A \sec B} \\ \sec(A+B) &= \frac{\sec A \sec B}{1 - \tan A \tan B}\end{aligned}\quad (50)$$

Que era lo que queríamos demostrar.

4.8.2.2 Secante del ángulo doble

Sí en lugar de utilizar el ángulo B en la Ecuación (30) utilizamos el ángulo A, obtendremos

$$\sec(A+A) = \frac{\sec A \sec A}{1 - \tan A \tan A} = \frac{\sec^2 A}{1 - \tan^2 A}\quad (51)$$

Como la $\sec^2 A = 1 + \tan^2 A$

$$\begin{aligned}&= \frac{1 + \tan^2 A}{1 - \tan^2 A} \\ \sec(2A) &= \frac{1 + \tan A}{1 - \tan A}\end{aligned}\quad (52)$$

Obsérvese que es necesario saber la identidad expresada en la Ecuación (30) únicamente, ya que las demás resultarán de cambiar un ángulo de la misma ecuación.

4.8.2.3 Secante del ángulo mitad

Si se resuelve la Ecuación (51) respecto a $\sec^2 A$,

$$\sec^2 A = \frac{\sec^2 A}{1 - \tan^2 A}$$

Es decir que:

$$\sec^2 A = (1 - \tan^2 A) \sec (2A)$$

sustituyendo A por $1/2B$, entonces $2A=B$, se tiene que:

$$\sec(B/2) = (1 - \tan^2(B/2)) \sec (B) \quad (53)$$

El signo algebraico a utilizar en la Ecuación (53) el signo que determina la función coseno de $1/2B$ en el cuadrante correspondiente. Tengase presente la Ecuación (52) en la deducción del seno de la ángulo mitad.

4.8.2.4 Secante de la diferencia de dos ángulos

Si en la Ecuación (50) sustituimos $-C$ por B,

$$\sec(A - C) = \frac{\sec A \sec (-C)}{1 - \tan A \tan (-C)}$$

Dado que la función secante es par y la función circular tangente es impar, se cumple que:

$$\sec(A - C) = \frac{\sec A \sec C}{1 + \tan A \tan C} \quad (54)$$

Notese que, partiendo de la Ecuación (54) podemos hallar las Ecuaciones (50), (52) y (53).

4.8.2.5 Seno de la suma de dos ángulos

Con centro en el origen de coordenadas xy , y los ángulos A (en posición normal), B (trazando con su vértice en O , y el lado inicial sobre el lado terminal de A ; es decir que B está en posición normal en un sistema de ejes coordenados cuyos ejes se obtienen girando alrededor de O , los ejes x y y en un ángulo A), y $A+B$ (en posición común), ver figura 4.17.

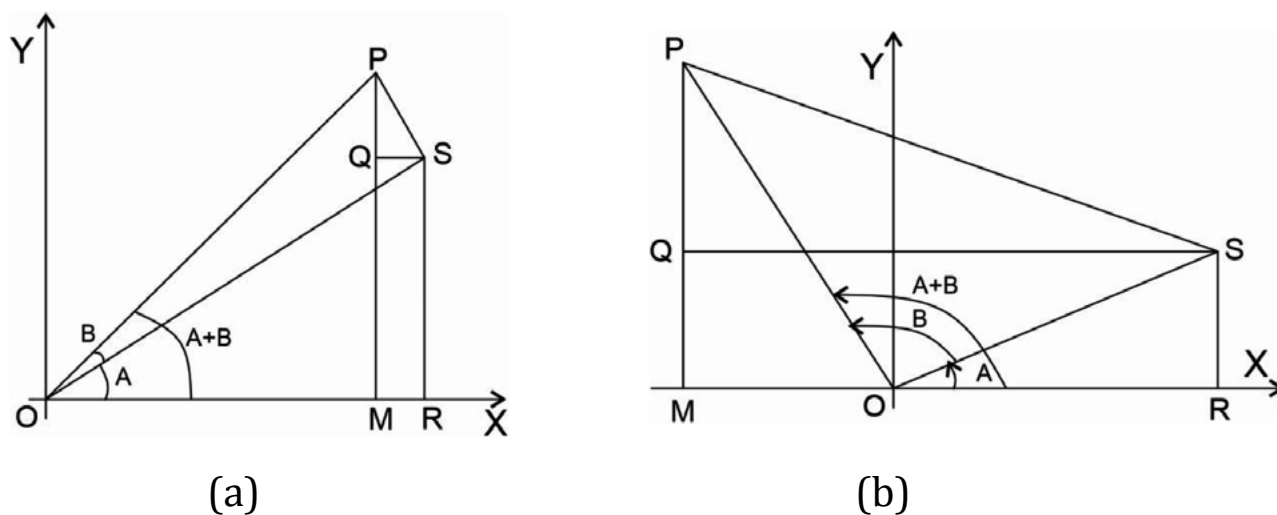


Figura 4.17 Seno de la suma de dos ángulos, (a) y (b)

Debemos demostrar que:

$$\operatorname{sen}(A + B) = \operatorname{sen} A \cos B - \cos A \operatorname{sen} B \quad (55)$$

Demostraremos la Ecuación (55) con restricción de A y B sean igual en el intervalo: $0 < A + B < \pi/2$, o $\pi/2 < A + B < \pi$, es decir que el ángulo está en el Q1 o en el Q2.

Sí P es un punto sobre el lado terminal de, la línea PS se traza perpendicular al lado terminal de A , y PM se traza perpendicular al eje x . En seguida QS se traza perpendicular a PM , tenemos que:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(A + B) &= \frac{PM}{OP} = \frac{QM + PQ}{OP} = \frac{QM}{OP} + \frac{PQ}{OP} = \frac{SR}{OP} + \frac{PQ}{OP} \\ \operatorname{sen}(A + B) &= \frac{SR}{OP} \frac{OS}{OP} + \frac{PS}{OP} \frac{PQ}{PS} \\ \operatorname{sen}(A + B) &= \operatorname{sen} A \cos B + \cos A \operatorname{sen} B \end{aligned}$$

Que corresponde a lo que se quería demostrar.

4.8.2.7 Seno del ángulo doble

Si en la Ecuación (55) se reemplaza A por B, tendremos que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(A + A) &= \operatorname{sen} A \cos A + \cos A \operatorname{sen} A \\ \operatorname{sen}(2A) &= 2\operatorname{sen} A \cos A \end{aligned} \quad (56)$$

4.8.2.7 Seno del ángulo mitad

Resolviendo la Ecuación (52) respecto a , se tiene que

$$\begin{aligned} \sec(2A) &= \frac{1 + \tan A}{1 - \tan A} \\ \frac{1}{\cos(2A)} &= \frac{1 + \frac{\operatorname{sen} A}{\cos A}}{1 - \frac{\operatorname{sen} A}{\cos A}} = \frac{\frac{\cos A + \operatorname{sen} A}{\cos A}}{\frac{\cos A - \operatorname{sen} A}{\cos A}} = \frac{\cos A + \operatorname{sen} A}{\cos A - \operatorname{sen} A} \frac{\cos A}{\cos A} \\ &= \frac{\cos A + \operatorname{sen} A}{\cos A - \operatorname{sen} A} \frac{\cos A + \operatorname{sen} A}{\cos A + \operatorname{sen} A} = \frac{\cos^2 A + \operatorname{sen}^2 A}{\cos^2 A - \operatorname{sen}^2 A} \\ \cos(2A) &= \cos^2 A - \operatorname{sen}^2 A = 1 - 2\operatorname{sen}^2 A \\ \operatorname{sen} A &= \sqrt{\frac{1 - \cos(2A)}{2}} = \sqrt{\frac{\sec(2A) - 1}{2}} \sec(2A) \end{aligned}$$

Haciendo $2A = B$

$$\operatorname{sen}(B/2) = \sqrt{\frac{\sec B - 1}{2}} \sec B \quad (57)$$

Es la fórmula para el seno de la mitad de un ángulo. El signo algebraico a

emplear depende del cuadrante a que pertenezca $B/2$.

4.8.2.8 Seno de la diferencia de dos ángulos

Si se reemplaza en la Ecuación (55) al ángulo B por el ángulo $-C$, se tiene:

$$\operatorname{sen}(A - C) = \operatorname{sen} A \cos(-C) - \cos A \operatorname{sen}(-C)$$

Como $\cos(-C) = \cos C$ y $\operatorname{sen}(-C) = -\operatorname{sen} C$, luego,

$$\operatorname{sen}(A - C) = \operatorname{sen} A \cos C - \cos A \operatorname{sen} C \quad (56)$$

4.8.2.9 Tangente de la suma de dos ángulos

Para deducir la fórmula de la tangente de la suma de dos ángulos, tendremos que apelar a la Ecuación (23) (identidades de razón), es decir que:

$$\tan(A + B) = \frac{\operatorname{sen}(A + B)}{\cos(A + B)}$$

Como,

$$\begin{aligned} \sec(A + B) &= \frac{\sec A \sec B}{1 - \tan A \tan B}; & \cos(A + B) &= \frac{1 - \tan A \tan B}{\sec A \sec B} = \\ &= \cos A \cos B (1 - \tan A \tan B) \\ \cos(A + B) &= \cos A \cos B - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \end{aligned} \quad (59)$$

Luego:

$$\tan(A + B) = \frac{\operatorname{sen} A \cos B + \cos A \operatorname{sen} B}{\cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B}$$

Dividiendo la $\tan(A + B)$ en el numerador y el denominador por $\cos A \cos B$

$$\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} \quad (60)$$

4.8.2.10 Tangente del ángulo doble

Para hallar la fórmula de la tangente del ángulo doble se debe realizar la siguiente sustitución, $B=A$, así:

$$\begin{aligned} \tan (A + A) &= \frac{\tan A + \tan A}{1 - \tan A \tan A} \\ \tan (2A) &= \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A} \end{aligned} \quad (61)$$

4.8.2.11 Tangente del ángulo mitad

Cómo sabemos

$$\tan (1/2B) = \sqrt{\frac{\frac{1 - \cos B}{2}}{\frac{1 + \cos B}{2}}}$$

Utilizando un solo radical, y multiplicando el numerador y el denominador por 2, se obtiene:

$$\tan (1/2B) = \sqrt{\frac{1 - \cos B}{1 + \cos B}} \quad (62)$$

Podemos cambiar la forma de la tangente del ángulo mitad, si multiplicamos el numerador y el denominador por $1 - \cos B$, luego:

$$\begin{aligned} \tan (1/2B) &= \sqrt{\frac{1 - \cos B}{1 + \cos B}} * \sqrt{\frac{1 - \cos B}{1 - \cos B}} = \sqrt{\frac{(1 - \cos B)^2}{\text{sen}^2 B}} = \\ \tan (1/2B) &= \frac{1 - \cos B}{\text{sen } B} \end{aligned} \quad (63)$$

Nótese que si en vez de multiplicar y dividir por $1 - \cos B$, hubiéramos multiplicado el numerador y el denominador por $1 + \cos B$ y simplificando se obtendría:

$$\tan (1/2B) = \frac{\text{sen } B}{1 - \cos B} \quad (64)$$

4.8.2.12 Tangente de la diferencia de dos ángulos

Para obtener la fórmula de la tangente de la diferencia de dos ángulos, se realiza una sustitución en la Ecuación (60) de $-C$ por B .

$$\tan(A - C) = \frac{\tan A + \tan(-C)}{1 - \tan A \tan(-C)}$$

Como la $\tan(-C) = -\tan C$, se tiene que

$$\tan(A - C) = \frac{\tan A - \tan C}{1 + \tan A \tan C} \quad (65)$$

A continuación presentaremos algunos ejemplos a las anteriores deducciones, y trataremos de mostrar ejemplos de aplicación en la rama de la ingeniería civil.

Ejemplo

Determinar el valor exacto de las funciones dadas y exprese la respuesta en la forma más sencilla posible.

a) $\cos(\pi/2)$

b) $\cos(23\pi/12)$

Para el caso a)

$$\begin{aligned} \cos(\pi/2) &= \cos(\pi/4 - \pi/6) = \cos(\pi/4)\cos(\pi/6) + \sen(\pi/4)\sen(\pi/6) = \\ &= \frac{2^{1/2}}{2} * \frac{3^{1/2}}{2} + \frac{2^{1/2}}{2} * \frac{1}{2} = \frac{6^{1/2}}{4} + \frac{2^{1/2}}{4} \\ \cos(\pi/2) &= \frac{6^{1/2}}{4} + \frac{2^{1/2}}{4} \end{aligned}$$

Para el caso b)

$$\begin{aligned} \cos(23\pi/12) &= \cos(2\pi - \pi/12) = \cos(2\pi)\cos(\pi/12) + \sen(2\pi)\sen(\pi/12) \\ &= 1 * \frac{6^{1/2}}{4} + \frac{2^{1/2}}{4} = \frac{(6^{1/2} + 2^{1/2})}{4} \end{aligned}$$

Ejemplo

Para la Figura 4.18, evalúen $\cos(A - B)$, $\cos(A + B)$, $\sen(A + B)$, $\tan(A - B)$ y $\tan(A + B)$, en cada caso.

$$a.) \sen A = 5/13; \quad \cos B = 3/5$$

$$b.) \cos A = -8/17 \quad \sen B = 4/5$$

Para el caso (a)

$$a.) \sen A = 5/13 \quad \cos B = 3/5$$

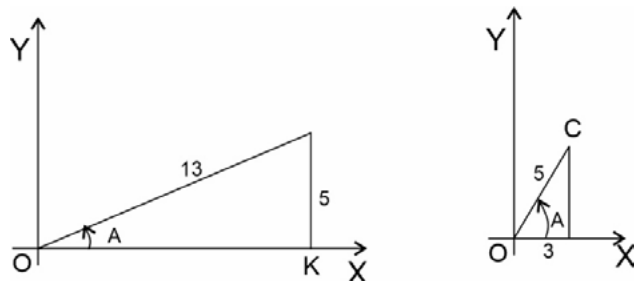


Figura 4.18 Ejemplo de adición y sustracción de ángulos en triángulos rectángulos caso a)

Los dos lados restantes son determinados usando el Teorema de Pitagoras,

$$\overline{OK} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12; \quad \cos A = 12/13; \quad \sen B = 4/5$$

$$\overline{OC} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4;$$

Luego,

$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sen A \sen B = \frac{12}{13} \frac{3}{5} - \frac{5}{13} \frac{4}{5} = \frac{36}{65} - \frac{4}{13} = \frac{16}{65}$$

$$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sen A \sen B = \frac{12}{13} \frac{3}{5} + \frac{5}{13} \frac{4}{5} = \frac{36}{65} + \frac{4}{13} = \frac{56}{65}$$

$$\sen(A + B) = \sen A \cos B + \cos A \sen B = \frac{5}{13} \frac{3}{5} + \frac{12}{13} \frac{4}{5} = \frac{3}{13} + \frac{48}{65} = \frac{63}{65}$$

$$\sen(A - B) = \sen A \cos B - \cos A \sen B = \frac{5}{13} \frac{3}{5} - \frac{12}{13} \frac{4}{5} = \frac{3}{13} - \frac{48}{65} = -\frac{33}{65}$$

$$\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = \frac{\frac{5}{12} + \frac{4}{3}}{1 - \frac{5}{12} \frac{4}{3}} = \frac{\frac{7}{4}}{\frac{4}{9}} = \frac{63}{16}$$

$$\tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B} = \frac{\frac{5}{12} - \frac{4}{3}}{1 + \frac{5}{12} \frac{4}{3}} = \frac{-\frac{11}{12}}{\frac{14}{9}} = -\frac{33}{56}$$

$$b.) \cos A = -8/17 \quad \text{sen } B = 4/5$$

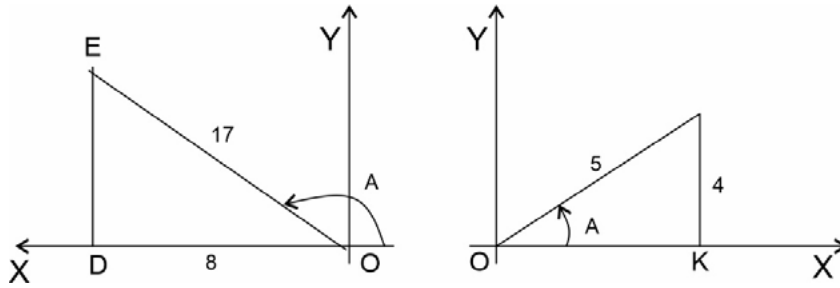


Figura 4.19 Ejemplo de adición y sustracción de ángulos en triángulos rectángulos, caso b)

Los dos lados restantes son determinados usando el Teorema de Pitágoras,

$$\overline{DE} = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15; \quad \cos B = 3/5; \quad \text{sen } A = 15/17; \quad \tan A = -15/8 \quad \text{y} \quad \tan B = 4/3.$$

$$\overline{OC} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3;$$

Luego,

$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \text{sen } A \text{sen } B = -\frac{8}{17} \frac{3}{5} - \frac{15}{17} \frac{4}{5} = -\frac{84}{85}$$

$$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \text{sen } A \text{sen } B = -\frac{8}{17} \frac{3}{5} + \frac{15}{17} \frac{4}{5} = \frac{36}{85}$$

$$\text{sen}(A + B) = \text{sen } A \cos B + \cos A \text{sen } B = -\frac{8}{17} \frac{4}{5} + \frac{15}{17} \frac{3}{5} = \frac{13}{85}$$

$$\text{sen}(A - B) = \text{sen } A \cos B - \cos A \text{sen } B = \frac{15}{17} \frac{3}{5} - \left(-\frac{8}{17}\right) \frac{4}{5} = \frac{77}{85}$$

$$\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = \frac{\left(-\frac{5}{8}\right) + \frac{4}{3}}{1 - \left(-\frac{15}{8}\right) \frac{4}{3}} = \frac{-\frac{13}{24}}{\frac{7}{2}} = -\frac{13}{84}$$

$$\tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B} = \frac{-\frac{15}{8} - \frac{4}{3}}{1 + \left(-\frac{5}{12}\right) \frac{4}{3}} = \frac{-\frac{77}{24}}{-\frac{3}{2}} = \frac{77}{36}$$

Ejemplo

Mediante un tornillo de paso circular levanta una carga G . Qué momento se necesita?. Sí: h es el paso de rosca, r_m el radio medio y fuerza tangencial (ver Figura 4.20 a y 4.20 b).

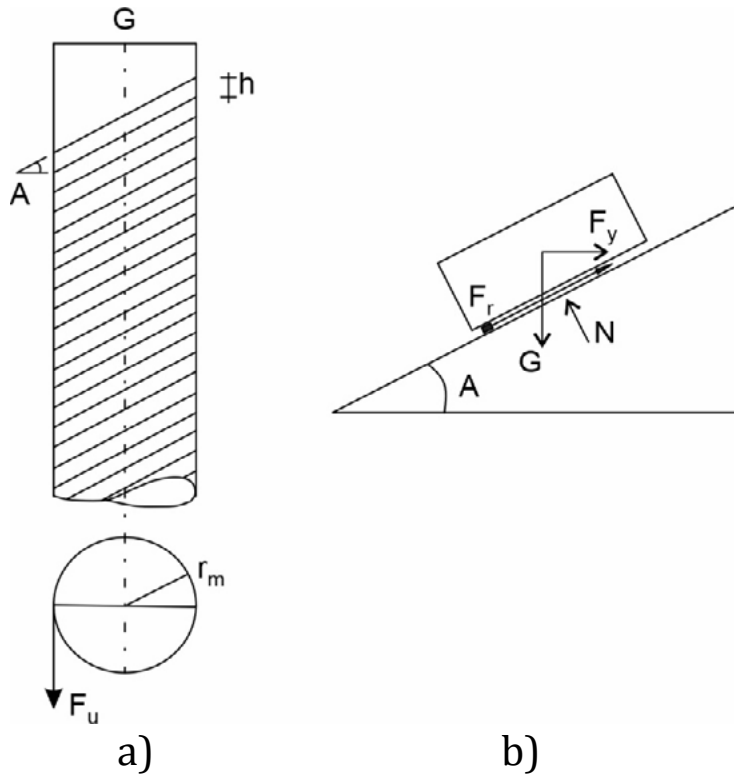


Figura 4.20 Ejemplo de aplicación en tornillos, caso a) y caso b)

El movimiento de dos superficies del tornillo, una respecto de la otra, y el movimiento de un cuerpo sobre un plano con un ángulo de inclinación A obedecen en mecánica a la misma ley de rozamiento (Figura 4.20 b). La tangente del ángulo A es el cociente del paso de rosca y el contorno medio desarrollado. Para un movimiento con velocidad constante las componentes de la fuerza en la dirección del movimiento y en la perpendicular a él están en cada caso en equilibrio, esto es, satisfacen las ecuaciones $F_t \cos A - F_r = G \sin A$ y $F_n = G \cos A + F_t \sin A$. Entre la fuerza normal F_n y la fuerza de rozamiento F_r existe además la relación $F_r = n F_n$. El coeficiente de rozamiento es $n = \tan B$, siendo B aquel ángulo de inclinación del plano para el cual la carga se deslizaría por su propio peso con velocidad uniforme. Para

la fuerza tangencial se obtiene:

$$F_t = G \frac{\text{sen } A + n \cos A}{\cos A - n \text{sen } A}$$

Dividiendo el numerador y denominador por $\cos A$, e introduciendo el ángulo de rozamiento, esta expresión se simplifica,

$$F_t = G \frac{\tan A + n \tan B}{1 - \tan A \tan B} = G \tan (A + B)$$

El momento M (ver Figura 4.20 a) $M = F_t r_m$

4.8.2.13 Fórmulas de productos y factores

Escribamos las fórmulas anteriormente deducidas $\text{sen } (A + B)$ y $\text{sen } (A - B)$, tenemos que:

$$\text{sen } (A + B) = \text{sen } A \cos B + \cos A \text{sen } B$$

$$\text{sen } (A - B) = \text{sen } A \cos B - \cos A \text{sen } B$$

Sumando miembro a miembro estas dos expresiones, tenemos:

$$\text{sen } (A + B) + \text{sen } (A - B) = 2 \text{sen } A \cos B$$

Al resolver $\text{sen } A \cos B$,

$$\text{sen } A \cos B = \frac{\text{sen } (A + B) + \text{sen } (A - B)}{2} \quad (66)$$

Y la substracción de las fórmulas del seno de la suma y la resta de ángulos cómo se obtiene:

$$\cos A \text{sen } B = \frac{\text{sen } (A + B) - \text{sen } (A - B)}{2} \quad (67)$$

Del mismo modo, la adición de las fórmulas del secante de la suma y resta de ángulos, se tiene:

$$\sec (A + B) = \frac{\sec A \sec B}{1 - \tan A \tan B}$$

$$\sec (A - B) = \frac{\sec A \sec B}{1 + \tan A \tan B}$$

$$\begin{aligned} \sec (A + B) + \sec (A - B) &= \sec A \sec B \left(\frac{1}{1 - \tan A \tan B} + \frac{1}{1 + \tan A \tan B} \right) \\ &= \sec A \sec B \left(\frac{1 + \tan A \tan B + 1 - \tan A \tan B}{1 - \tan^2 A \tan^2 B} \right) \end{aligned}$$

$$= \sec A \sec B \left(\frac{2}{1 - \tan^2 A \tan^2 B} \right)$$

$$\frac{\sec A \sec B}{1 - \tan^2 A \tan^2 B} = \frac{1}{2} \sec (A + B) + \sec (A - B)$$

Es decir que,

$$\sec A \sec B = \frac{1}{2} (1 - \tan^2 A \tan^2 B) (\sec (A + B) + \sec (A - B)) \quad (68)$$

Y la substracción de las fórmulas de la secante de la suma y la resta de ángulos, se obtiene:

$$\sec (A + B) - \sec (A - B) = \sec A \sec B \left(\frac{1}{1 - \tan A \tan B} - \frac{1}{1 + \tan A \tan B} \right)$$

$$= \sec A \sec B \left(\frac{1 + \tan A \tan B - 1 + \tan A \tan B}{1 - \tan^2 A \tan^2 B} \right)$$

$$= \sec A \sec B \left(\frac{2 \tan A \tan B}{1 - \tan^2 A \tan^2 B} \right)$$

Luego,

$$\sec A \sec B \left(\frac{\tan A \tan B}{1 - \tan^2 A \tan^2 B} \right) = \frac{1}{2} (\sec (A + B) - \sec (A - B))$$

$$\frac{\tan A \tan B}{1 - \tan A \tan B} \frac{\sec A \sec B}{1 + \tan A \tan B} = \frac{1}{2} (\sec (A + B) - \sec (A - B))$$

$$\frac{\tan A \tan B}{1 - \tan A \tan B} \sec (A + B) = \frac{1}{2} (\sec (A + B) - \sec (A - B))$$

$$\frac{\tan A \tan B}{1 - \tan A \tan B} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sec (A + B)}{\sec (A - B)} - 1 \right)$$

$$\frac{\sen A \sen B}{\cos A \cos B - \sen A \sen B} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sec (A + B)}{\sec (A - B)} - 1 \right)$$

$$\frac{\sen A \sen B}{\cos (A + B)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sec (A + B)}{\sec (A - B)} - 1 \right)$$

$$\sen A \sen B = \frac{1}{2} \cos (A + B) \left(\frac{\sec (A + B)}{\sec (A - B)} - 1 \right)$$

$$\sen A \sen B = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sec (A - B)} - \frac{1}{\sec (A + B)} \right)$$

$$\sen A \sen B = \frac{1}{2} \left(\frac{\sec (A + B) - \sec (A - B)}{\sec (A - B) \sec (A + B)} \right) \quad (69)$$

Si tomamos las identidades anteriormente deducidas de la $\tan (A + B)$ y $\tan (A - B)$, luego:

$$\tan (A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

$$\tan (A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

Sumando miembro a miembro estas dos expresiones tenemos que:

$$\tan A \tan B = 1 - \frac{2 \tan A \sec^2 B}{\tan (A + B) + \tan (A - B)} \quad (70)$$

Y haciendo la resta de la $\tan (A + B)$ y $\tan (A - B)$,

$$\tan A \tan B = 1 - \frac{2 \tan B \sec^2 A}{\tan (A + B) - \tan (A - B)} \quad (71)$$

Las Ecuaciones (66), (67), (68), (69), (70) y (71) se conocen como fórmulas de producto.

Sea $(A + B) = x$, y $(A - B) = y$. Podemos resolver estas ecuaciones para obtener $A = \frac{1}{2}(x + y)$, $B = \frac{1}{2}(x - y)$, y la substracción de esto en la Ecuación (66),

$$\sen x + \sen y = 2 \left[\frac{\sen \frac{1}{2}(x + y)}{\sec \frac{1}{2}(x - y)} \right] \quad (72)$$

Al substituir y por $-y$ en esta fórmula resulta, ya que $\sen(-y) = -\sen y$,

$$\sen x - \sen y = 2 \left[\frac{\sen \frac{1}{2}(x - y)}{\sec \frac{1}{2}(x + y)} \right] \quad (73)$$

Por la substitución de las Ecuaciones (67), (68), (69), (70) y (71) obtenemos:

$$\sec x - \sec y = \frac{\sec \frac{1}{2}(x + y) \sec \frac{1}{2}(x - y)}{1 - \left[\tan \frac{1}{2}(x + y) \tan \frac{1}{2}(x - y) \right]^2} \quad (74)$$

También,

$$\sec x - \sec y = 2 \sec x \sec y \sec \frac{1}{2}(x+y) \sec \frac{1}{2}(x-y) \quad (75)$$

y,

$$\tan x + \tan y = \frac{2 \tan \left[\frac{1}{2}(x+y) \right] \sec^2 \left[\frac{1}{2}(x-y) \right]}{1 - \left\{ \tan \left[\frac{1}{2}(x+y) \right] \tan \left[\frac{1}{2}(x-y) \right] \right\}^2} \quad (76)$$

$$\tan x - \tan y = \frac{2 \tan \left[\frac{1}{2}(x-y) \right] \sec^2 \left[\frac{1}{2}(x+y) \right]}{1 - \left\{ \tan \left[\frac{1}{2}(x+y) \right] \tan \left[\frac{1}{2}(x-y) \right] \right\}^2} \quad (77)$$

Las Ecuaciones (70), (71), (72), (73), (74), (75), (76) y (77) se llaman fórmulas de factores. Nótese que las fórmulas de producto expresan como suma ciertos productos de senos y cosenos, mientras que las fórmulas de factores expresan como productos ciertas sumas de senos y cosenos.